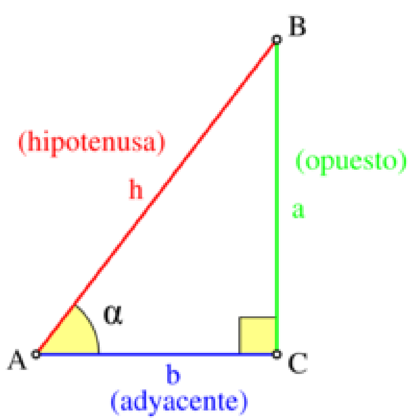
Capítulo 3: Razones trigonométricas

Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

Las Razones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. Las funciones trigonométricas son funciones cuyos valores son extensiones del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo trazado en una circunferencia unitaria (de radio unidad).

Las Razones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. Existen seis funciones trigonométricas básicas.

Para definir las razones trigonométricas del ángulo: α, del vértice *A*, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en lo sucesivo será:



- La hipotenusa (*h*) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- El cateto opuesto (*a*) es el lado opuesto al ángulo que queremos determinar.
- El cateto adyacente(*b*) es el lado adyacente al ángulo del que queremos determinar.

Todos los triángulos considerados se encuentran en el Plano Euclidiano, por lo que la suma de sus ángulos internos es igual a π radianes (o 180°). En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo los ángulos no rectos se encuentran entre 0 y π/2 radianes. Las definiciones que se dan a continuación definen estrictamente las funciones trigonométricas para ángulos de este rango:

- El **seno** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa:

$$\sin \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

El valor de esta relación no depende del tamaño del triángulo rectángulo que elijamos, siempre que tenga el mismo ángulo α, en cuyo caso se trata de triángulos semejantes.

- El **coseno** de un ángulo la relación entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa:

$$\cos \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

- La **tangente** de un es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la del adyacente:

$$\tan \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}.$$

- La **cotangente** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto:

$$\cot \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}.$$

- La **secante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente:

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{h}{b}.$$

- La **cosecante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto:

$$\csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{h}{a}.$$

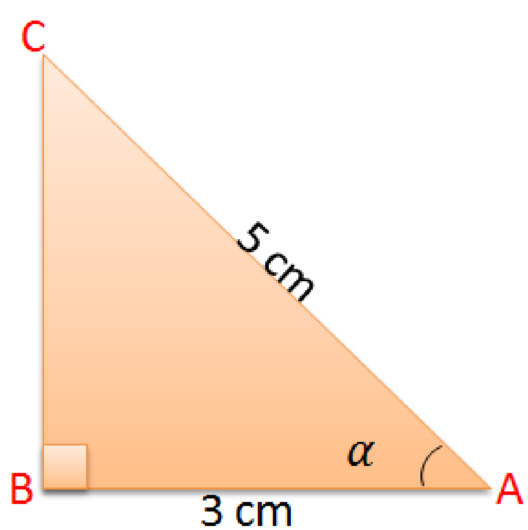
Tabla de funciones trigonométricas

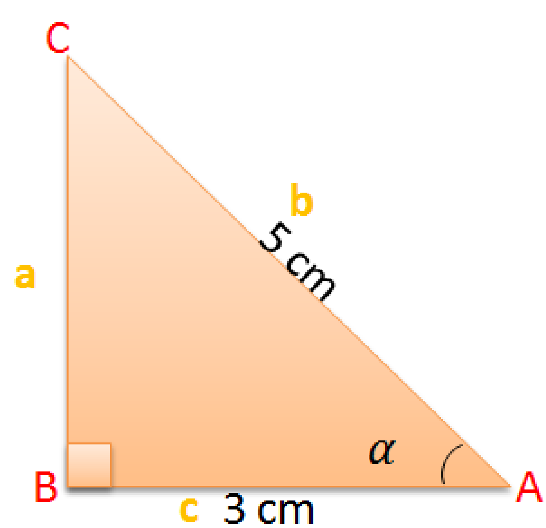
FUNCIÓN	ABREVIATURA	FÓRMULAS	
SENO	**Sen**	$\frac{Cat.Opuesto}{Hipotenusa}$	$\frac{1}{Csc}$
COSENO	**Cos**	$\frac{Cat.Adyacente}{Hipotenusa}$	$\frac{1}{Sec}$
TANGENTE	**Tan**	$\frac{Cat.Opuesto}{Cat.Adyacente}$	$\frac{1}{Cot}$
COTANGENTE	**Cot**	$\frac{Cat.Adyacente}{Cat.Opuesto}$	$\frac{1}{Tan}$
SECANTE	**Sec**	$\frac{Hipotenusa}{Cat.Adyacente}$	$\frac{1}{Cos}$
COSECANTE	**Csc**	$\frac{Hipotenusa}{Cat.Opuesto}$	$\frac{1}{Sen}$

EJEMPLOS:

- Calcular las razones trigonométricas de los siguientes triángulos rectángulos:

1.





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *Como se desconoce el valor del cateto opuesto (que es el que está frente al ángulo de referencia α), se puede utilizar el teorema de Pitágoras para conocer su valor; en este caso ese valor corresponde a un cateto.*
- ✓ *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$a^2 = (5\ cm)^2 - (3\ cm)^2$

$a^2 = 25\ cm^2 - 9\ cm^2$

$a^2 = 16\ cm^2$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

a= $\sqrt{16\ cm^2}$ = 4 cm

- ✓ *Finalmente el valor obtenido (4 cm) es el valor que corresponde al cateto opuesto.*

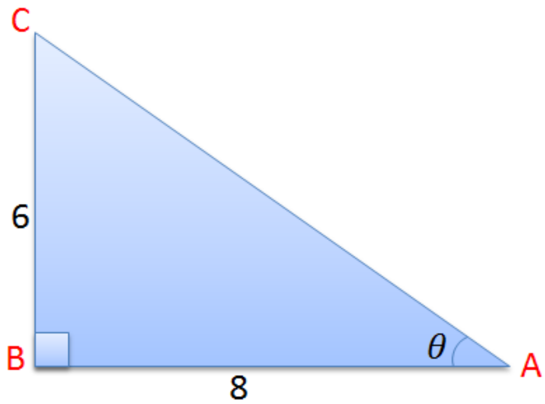
- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo α:*

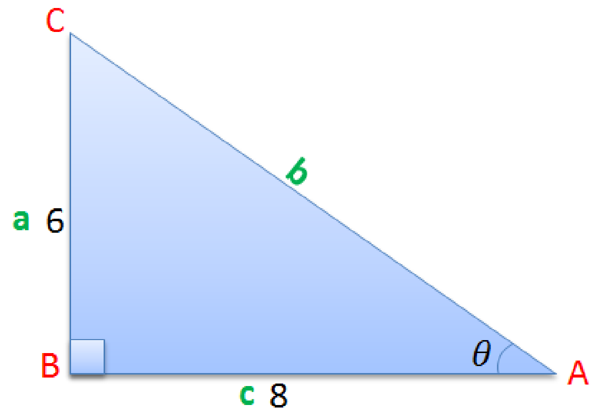
$Sen\alpha = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{a}{b} = \frac{4\ cm}{5\ cm} = 0{,}8$ $\quad cos\alpha = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{3\ cm}{5\ cm} = 0{,}6$

$Tan\alpha = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{a}{c} = \frac{4\ cm}{3\ cm} = 1{,}33$ $\quad Cot\alpha = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{c}{a} = \frac{3\ cm}{4\ cm} = 0{,}75$

$Sec\alpha = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{b}{c} = \frac{5\ cm}{3\ cm} = 1{,}67$ $\quad Csc\alpha = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{b}{a} = \frac{5\ cm}{4\ cm} = 1{,}25$

2.





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *Como se desconoce el valor de la hipotenusa, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para conocer su valor.*
- ✓ *Para calcular la hipotenusa se suma el cuadrado de sus catetos*

$b^2 = (6)^2 + (8)^2$

$b^2 = 36 + 64$

$b^2 = 100$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la suma anterior

$b = \sqrt{100} = 10$

- ✓ *Finalmente el valor obtenido (10) es el valor que corresponde a la hipotenusa.*

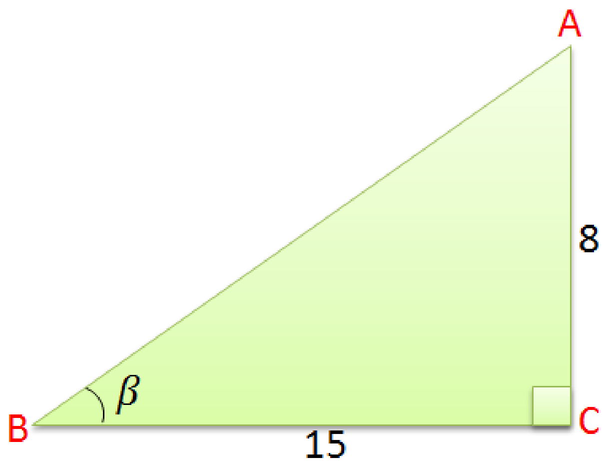
- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo θ:*

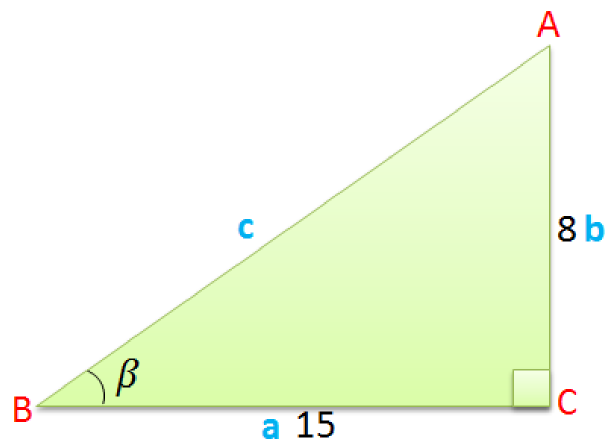
$Sen\theta = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{a}{b} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ $\qquad$ $cos\theta = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

$Tan\theta = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{a}{c} = \frac{6}{8} = 0{,}75$ $\quad Cot\theta = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{c}{a} = \frac{8}{6} = 1{,}33$

$Sec\theta = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{b}{c} = \frac{10}{8} = 1{,}25$ $\quad Csc\theta = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{b}{a} = \frac{10}{6} = 1{,}67$

3.





Solución:

- *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (c)*
- *Como se desconoce el valor de la hipotenusa, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para conocer su valor.*
- *Para calcular la hipotenusa se suma el cuadrado de sus catetos*

$c^2 = (15)^2 + (8)^2$

$c^2 = 225 + 64$

$c^2 = 289$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la suma anterior

$c = \sqrt{289} = 17$

- *Finalmente el valor obtenido (17) es el valor que corresponde a la hipotenusa.*

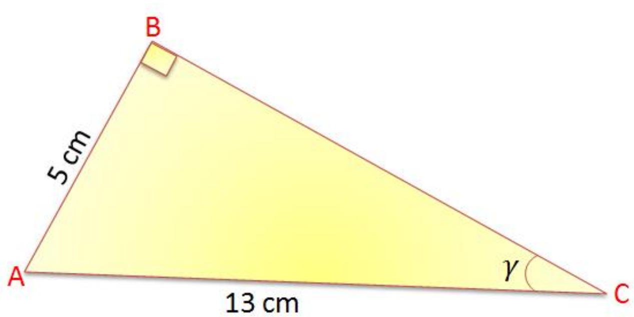
- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo β:*

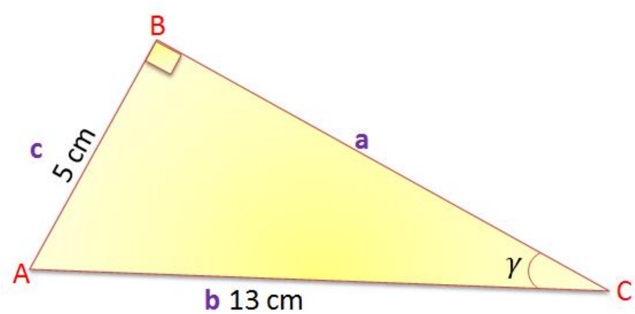
$$Sen\beta = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{b}{c} = \frac{8}{17} = 0{,}47 \qquad cos\beta = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{a}{c} = \frac{15}{17} = 0{,}88$$

$$Tan\beta = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{b}{a} = \frac{8}{15} = 0{,}53 \qquad Cot\beta = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{a}{b} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

$$Sec\beta = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{c}{a} = \frac{17}{15} = 1{,}13 \qquad Csc\beta = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{c}{b} = \frac{17}{8} = 2{,}125$$

4.





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor del cateto adyacente(a), para calcularlo se puede utilizar el teorema de Pitágoras.*
- ✓ *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$a^2 = (13\ cm)^2 - (5\ cm)^2$

$a^2 = 169\ cm^2 - 25\ cm^2$

$a^2 = 144\ cm^2$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

a= $\sqrt{144\ cm^2}$ = 12 cm

- ✓ *Finalmente el valor obtenido (12 cm) es el valor que corresponde al cateto adyacente.*

- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo γ:*

$Sen\gamma = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{5\ cm}{13\ cm} = 0{,}38$ $\qquad cos\gamma = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{a}{b} = \frac{12\ cm}{13\ cm} = 0{,}92$

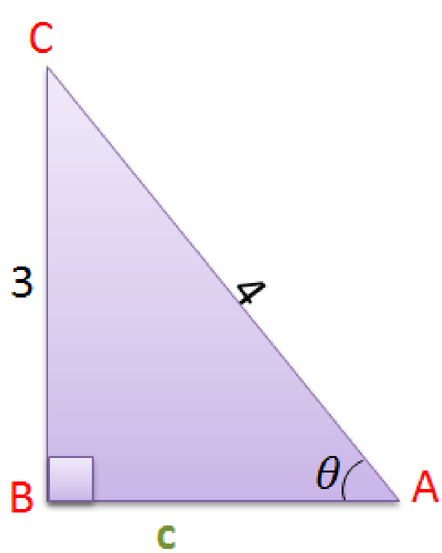
$Tan\gamma = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{c}{a} = \frac{5\ cm}{12\ cm} = 0{,}42$ $\qquad Cot\gamma = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{a}{c} = \frac{12\ cm}{5\ cm} = 2{,}4$

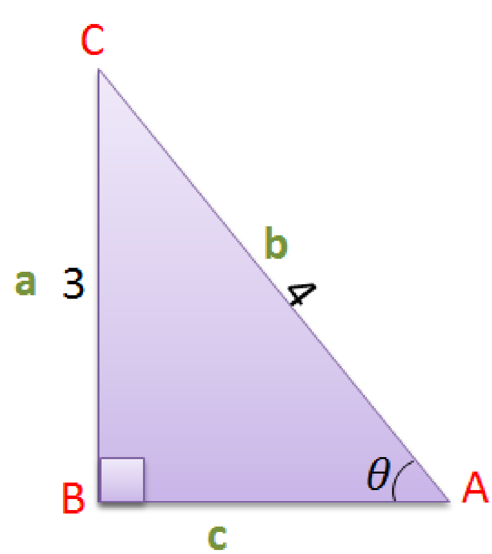
$Sec\gamma = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{b}{a} = \frac{13\ cm}{12\ cm} = 1{,}08$ $\qquad Csc\gamma = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{b}{c} = \frac{13\ cm}{5\ cm} = 2{,}6$

- Hallar el valor de Cosθ y Tanθ, si sen$\theta = \frac{3}{4}$

Solución:

- ✓ *Como* $sen\theta = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{3}{4}$, *entonces 3 es el valor del cateto opuesto del ángulo θ y 4 es la hipotenusa del triángulo rectángulo. Gráficamente quedaría así:*





- *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- *En este caso se desconoce el valor del cateto adyacente(c), para calcularlo se puede utilizar el teorema de Pitágoras.*
- *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$c^2 = (4)^2 - (3)^2$

$c^2 = 16 - 9$

$c^2 = 7$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

$c = \sqrt{7} =$

- *En este caso $\sqrt{7}$ no tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto podemos dejarla indicada*

- *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor coseno y la tangente para el ángulo θ:*

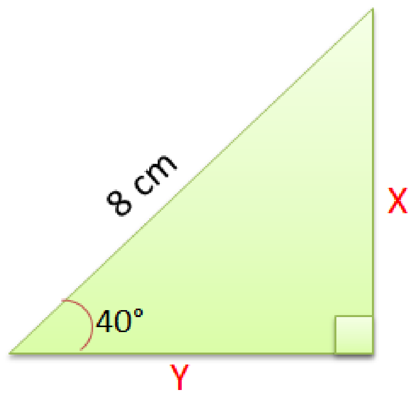
$$\cos\theta = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0{,}66$$

$$Tan\gamma = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{a}{c} = \frac{3\ cm}{\sqrt{7}\ cm} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

En el caso de la tangente, como $\sqrt{7}$ queda en el denominador, debemos racionalizarla:

$$\frac{3\ cm}{\sqrt{7}\ cm} = \frac{3.\sqrt{7}}{\sqrt{7}\ .\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

- En el siguiente triángulo hallar el valor de "X" y "Y"



Solución:

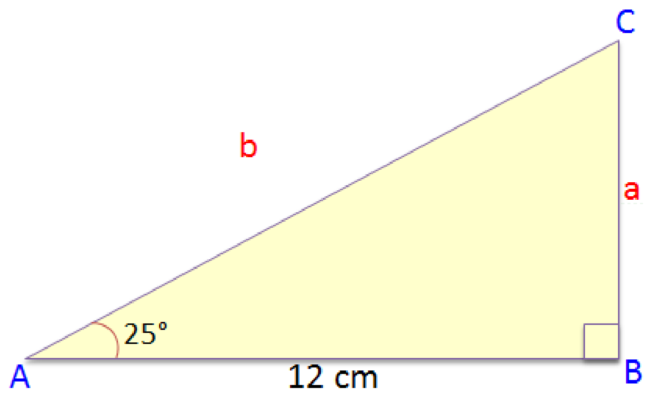
- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (8 cm)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor de los catetos opuesto (X) y adyacente (Y).*
- ✓ *Como se conoce el valor de la hipotenusa y el valor del ángulo, se puede emplear la función seno o coseno, que son las que contienen la hipotenusa.*
- ✓ *En el caso del cateto **X**, se utilizará la función seno:*

$$sen40° = \frac{Cat.op}{hipot} \rightarrow sen40° = \frac{\boldsymbol{X}}{8\ cm} \rightarrow \boldsymbol{X} = sen40°\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{X} = 0{,}64\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{X} \approx \boldsymbol{5\ cm}$$

- ✓ *Para calcular **Y** se puede utilizar teorema de Pitágoras o la función coseno (que contienen el valor de la hipotenusa) o la función tangente (que contiene el valor del cateto opuesto, el cual fue hallado previamente). En este caso se utilizará la función coseno:*

$$cos40° = \frac{Cat.ady}{Hipot} \rightarrow cos40° = \frac{\boldsymbol{Y}}{8\ cm} \rightarrow \boldsymbol{Y} = cos40°\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{Y} = 0{,}77\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{Y} \approx \boldsymbol{6\ cm}$$

- En el siguiente triángulo hallar el valor de “a” y “b”



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor de la hipotenusa(b) y el cateto opuesto (a)*
- ✓ *Como se conoce el cateto adyacente (12 cm), se puede emplear la función coseno o tangente, que son las que contienen este valor.*
- ✓ *En el caso del cateto b, se utilizará la función coseno:*

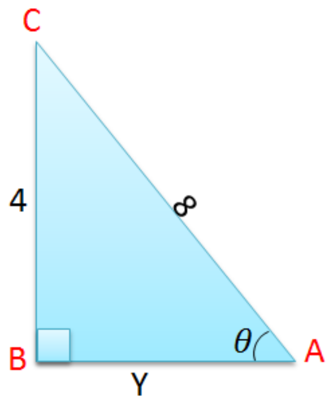
$$Cos25° = \frac{Cat.ady}{hipot} \rightarrow cos25° = \frac{12\ cm}{\boldsymbol{b}} \rightarrow \boldsymbol{b} = \frac{12\ cm}{cos25°} \rightarrow \boldsymbol{b} = \frac{12\ cm}{0{,}9} \rightarrow \boldsymbol{b} \approx \boldsymbol{13\ cm}$$

- ✓ *Para calcular* ***a*** *se puede utilizar teorema de Pitágoras o la función seno (que contienen el valor de la hipotenusa, la cual fue hallada previamente) o la función tangente (que contiene el valor del cateto adyacente). En este caso se utilizará la función tangente:*

$$Tan25° = \frac{Cat.op.}{Cat.ady} \rightarrow tan25° = \frac{\boldsymbol{a}}{12\ cm} \rightarrow \boldsymbol{a} = tan25°\ x\ 12\ cm \rightarrow \boldsymbol{a} = 0{,}47\ x\ 12\ cm$$

$$\boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{5,6\ cm}$$

- En el siguiente triángulo hallar el valor de "**Y**" y el ángulo θ:



Solución:

- *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- *En este caso se desconoce el valor del cateto adyacente (Y), para calcularlo se puede utilizar el teorema de Pitágoras.*
- *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$Y^2 = (8)^2 - (4)^2$

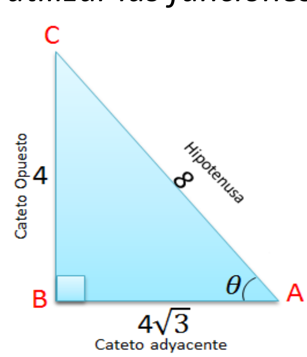
$Y^2 = 64 - 16$

$Y^2 = 48$

$Y = \sqrt{48}$

$Y = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9$

Para calcular el ángulo θ, podemos utilizar las funciones seno, coseno o tangente.



En este caso utilizaremos la función seno= $\frac{Cat.opuesto}{Hipotenusa} = \frac{4}{8} = 0{,}5$

- ✓ *Para obtener el ángulo debemos hacer uso de la calculadora científica, teniendo en cuenta los siguientes criterios:*
- *Identificar la parte del teclado de la calculadora que vas a tener que utilizar de una manera específica para los ejercicios con razones trigonométricas*.

- *En primer lugar debes fijarte en el* ***modo de la unidad angular*** *en la que estés trabajando. Generalmente, la unidad por omisión es el grado sexagesimal. Comprueba que en la pantalla de la calculadora aparezca la letra D o DEG. En caso contrario deberás pulsar la secuencia de teclas* SHIFT MODE (SET UP)

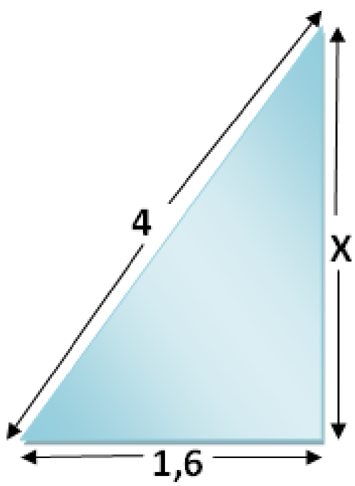
Y elegir DEG para trabajar con grados sexagesimales.

- Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo, pulsa la tecla correspondiente sin cos tan *y después el valor del ángulo.*
- *Si sabemos el valor de una razón trigonométrica y queremos averiguar el ángulo, tendremos que activar las funciones inversas con ayuda de la tecla SHIFT (en algunas calculadoras INV).*
- *En nuestro caso como vamos a calcular el valor de sen*$\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$*= 0,5, debemos activar la función* ***SHIFT – seno – 0,5****. De esta manera nos da el valor del ángulo, el cual es de 30°, por lo tanto* $\boldsymbol{\theta = 30°}$

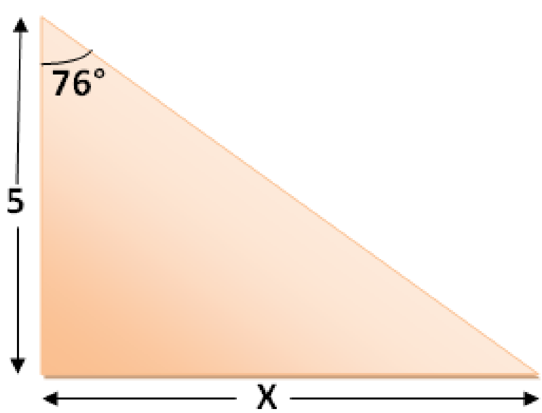
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

En los siguientes triángulos, haciendo uso de las razones trigonométricas, hallar el valor de la incógnita.

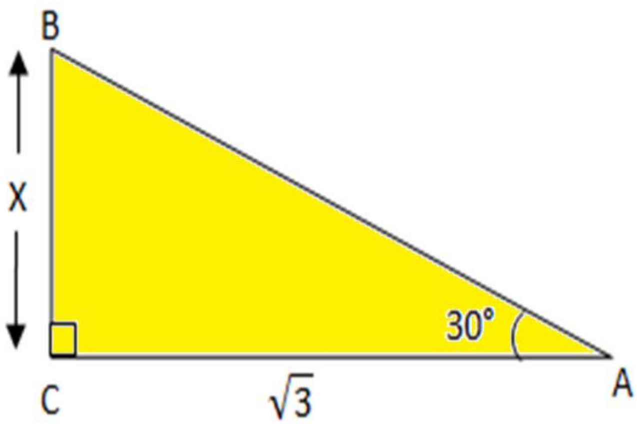
1.



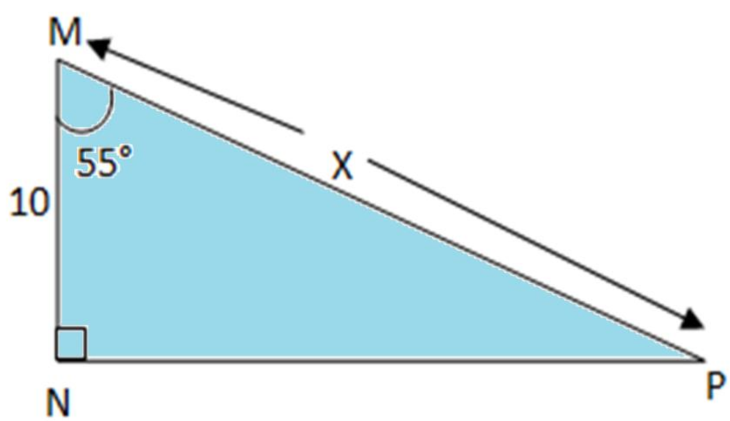
2.



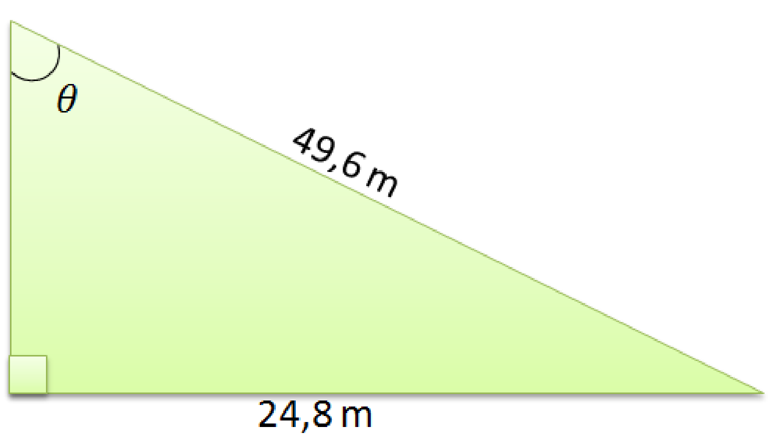
3.



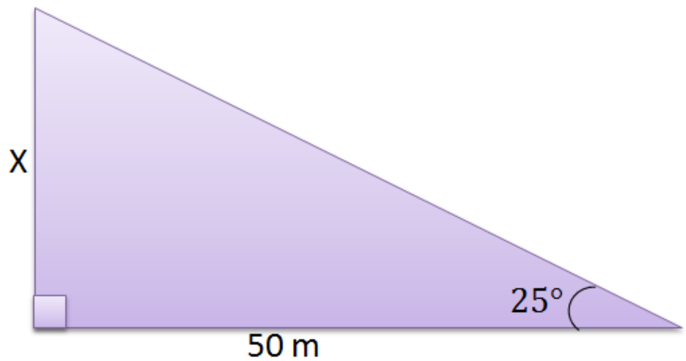
4.



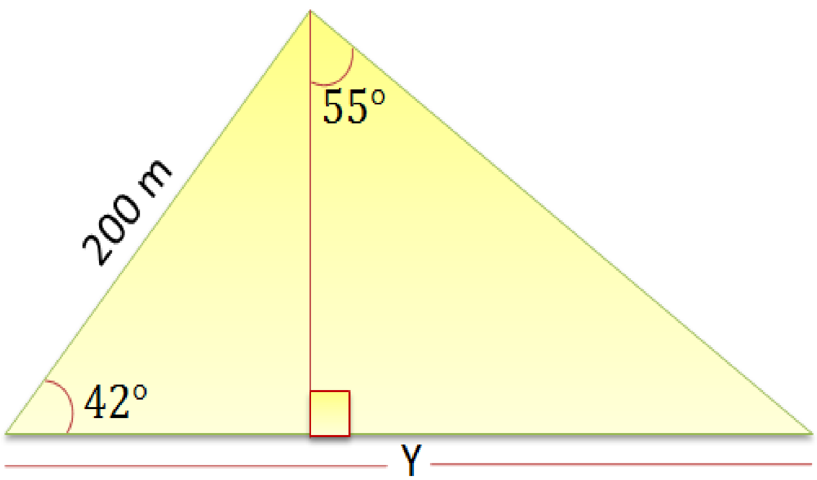
5.



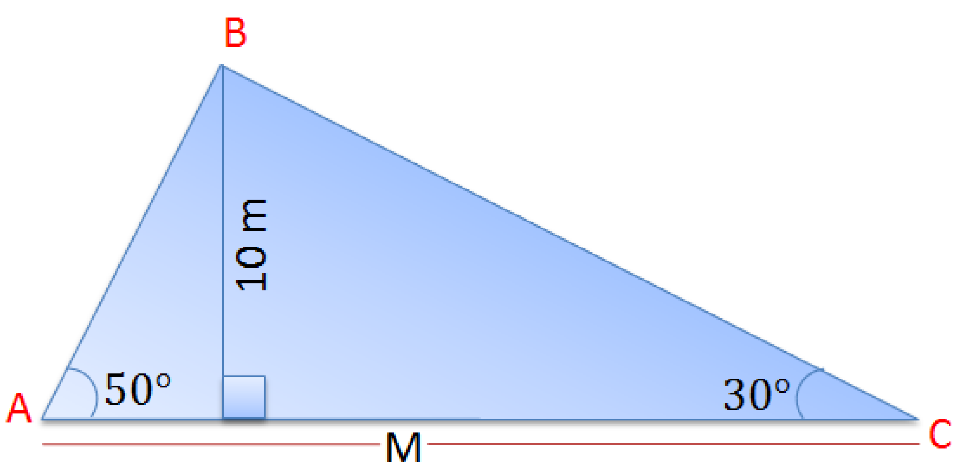
6.



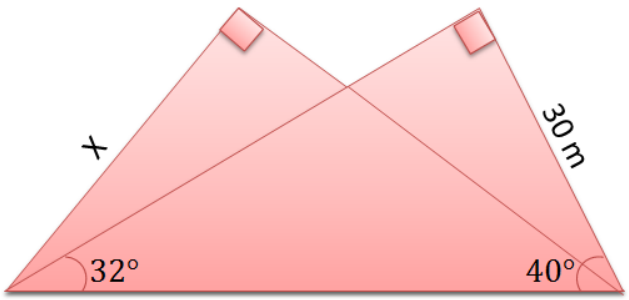
7.



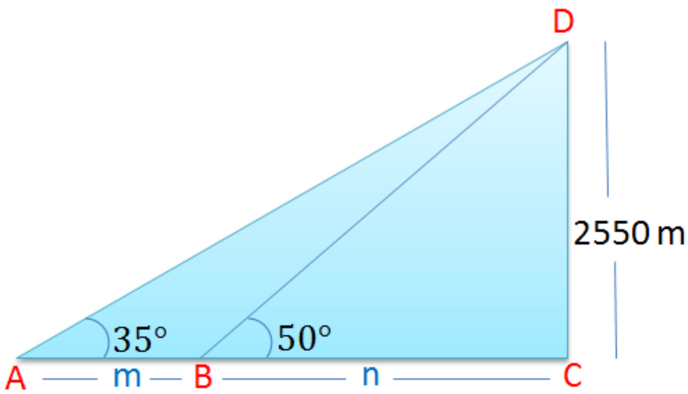
8.



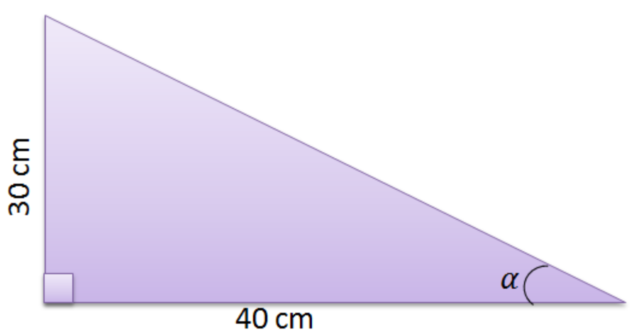
9.



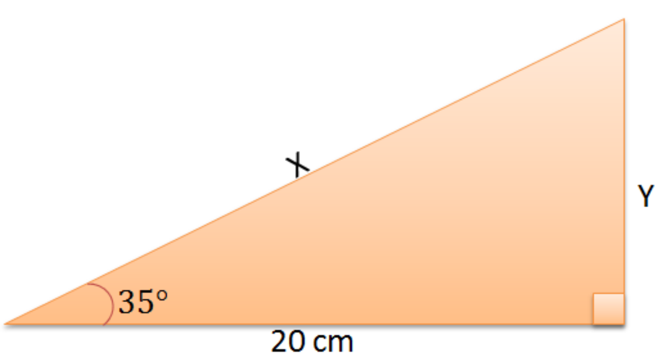
10.



11.



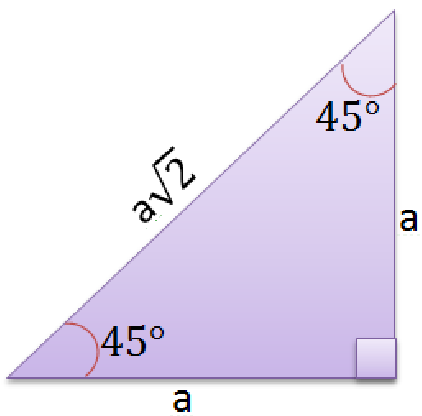
12.

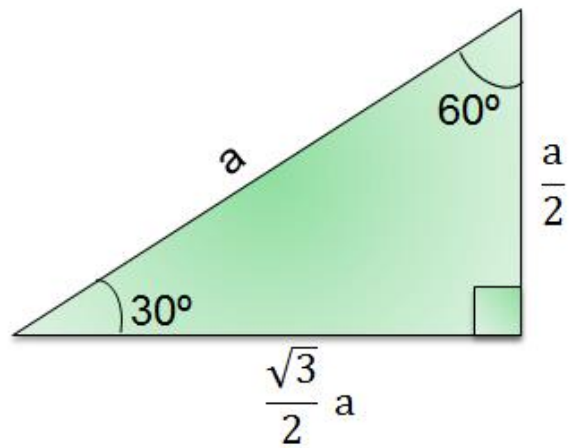


RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA LOS ÁNGULOS ESPECIALES

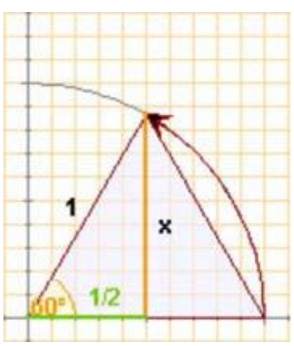
En los ángulos especiales de 30°, 45°, 60° o $\frac{\pi}{6}$,$\frac{\pi}{4}$,$\frac{\pi}{3}$ radianes, se tiene en cuenta las siguientes propiedades:

- En un triángulo rectángulo e isósceles los catetos son iguales.
- En un triángulo rectángulo con ángulos interiores de 30° y 60°, el lado opuesto al ángulo de 30° tiene una longitud igual a la mitad de la hipotenusa.

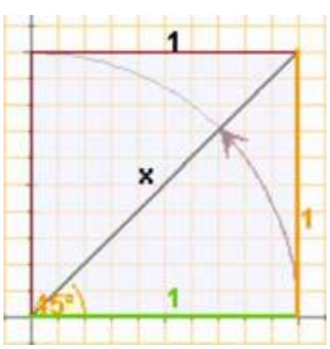




En un triángulo equilátero los ángulos miden 60° con el Teorema de Pitágoras se calcula la altura.



$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



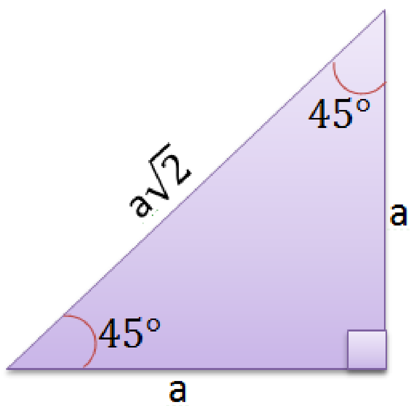
Tomamos un cuadrado de lado 1. Con el Teorema de Pitágoras se calcula la diagonal.

$$diag = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

De acuerdo con las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene:

$\text{Sen}\theta = \frac{\text{Cat.Op.}}{\text{Hipot.}}$ $\text{Cos}\theta = \frac{\text{Cat.Ady.}}{\text{Hipot.}}$ $\text{Tan}\theta = \frac{\text{Cat.Op.}}{\text{Cat.ady.}}$

<u>Ángulo de 45°</u>

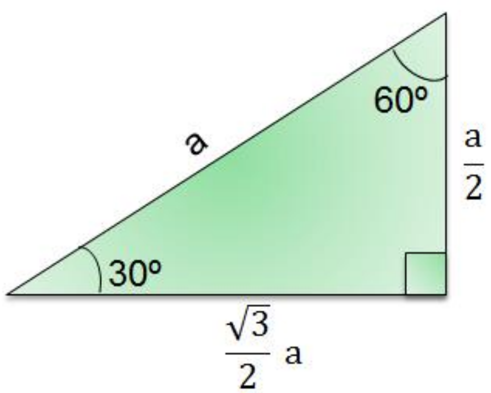


$$\text{Sen}45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tan}45° = \frac{a}{a} = 1$$

<u>Ángulo de 30°</u>

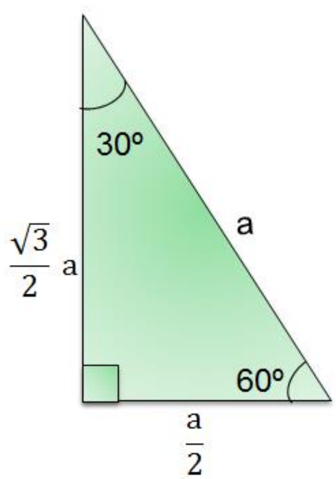


$$\text{Sen}30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{a\sqrt{3}}{a.2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Tan}30° = \frac{\frac{a}{2}}{a.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{a.2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ x\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

<u>Ángulo de 60°</u>



$$\text{Sen}60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}.a}{\frac{a}{1}} = \frac{a\sqrt{3}}{a.2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos}60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{a}{a.2} = \frac{1}{2}$$

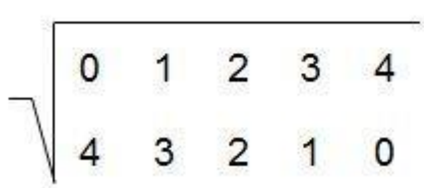
$$\text{Tan}60° = \frac{\frac{\sqrt{3}\,.a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{2.\sqrt{3}\,.a}{2.a} = \sqrt{3}$$

Los ángulos especiales de 30°, 45° y 60° unidos a los de 0° y 90° se consideran en trigonometría como ángulos notables y el resumen de las funciones trigonométricas para estos ángulos se pueden establecer de la siguiente manera:

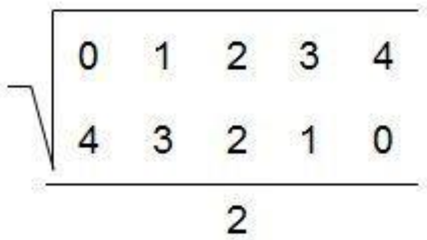
Angulo en grados	0°	30°	45°	60°	90°
Senθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tanθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No definida

- ❖ Primero dibujamos un símbolo de raíz grande, tal como éste…

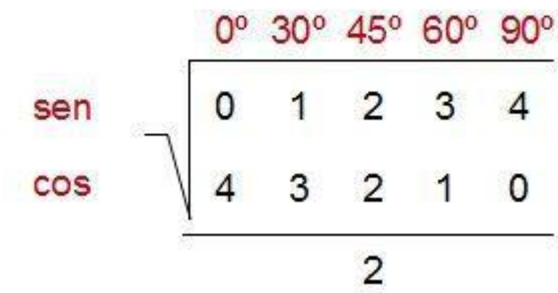
- ❖ Escribimos dentro dos filas de números, en la parte superior una que vaya del *0* al *4*, y en la parte inferior otra que vaya al revés, del *4* al *0*…



- Dibujamos una barra grande debajo y un *2* bajo ella…



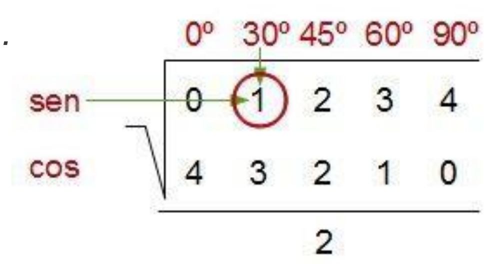
- Y ahora lo completamos con lo que nos interesa saber…



Ya podemos saber el *seno* o el *coseno* de cualquiera de estos ángulos notables.

- El procedimiento es bastante sencillo. El resultado va a ser la raíz de un número entre 2, y ese número es el que corresponde a la fila del *sen* o del *cos* (según queramos calcular el *seno* o el *coseno*) y a la columna del *ángulo notable* en cuestión. Después tan solo tenemos que simplificar el resultado obtenido, si se puede. Vamos a hacer unos ejemplos que así se ve mucho mejor.

Supongamos que queremos saber el *sen* 30º…



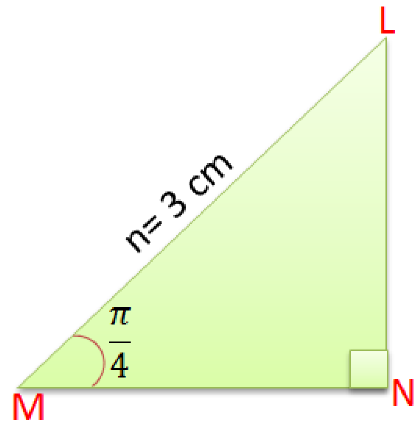
Es decir:

$$sen\,30^{o} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

Debemos recordar que para hallar la tangente sólo es necesario dividir seno entre coseno.

EJEMPLOS:

1. Encontrar el perímetro del triángulo rectángulo.



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (n)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor del catetos opuesto (m) y adyacente (l), para calcularlo se puede tener en cuenta que un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ corresponde a 45°*
- ✓ *Teniendo en cuenta que el triángulo es isósceles, ambos catetos tendrán la misma medida.*
- ✓ *Si la hipotenusa es igual a un cateto por $\sqrt{2}$ (m.$\sqrt{2}$), entonces se puede despejar la incógnita.*

Hipotenusa= m.$\sqrt{2}$, entonces: m=$\frac{hip.}{\sqrt{2}}$, reemplazando los valores se obtiene:

m=$\frac{3\ cm}{\sqrt{2}}$, racionalizando denominador se obtiene m=$\frac{3\ cm}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}\ cm}{2}$

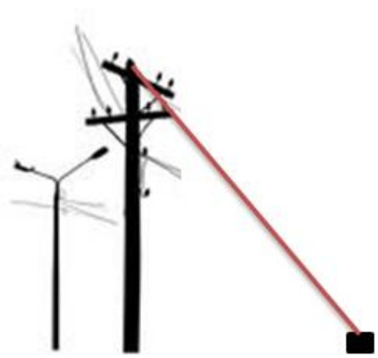
- ✓ *Para calcular el perímetro se suma el valor de la hipotenusa y se puede multiplicar por dos el valor del cateto obtenido anteriormente, dado que se trata de un triángulo isósceles.*

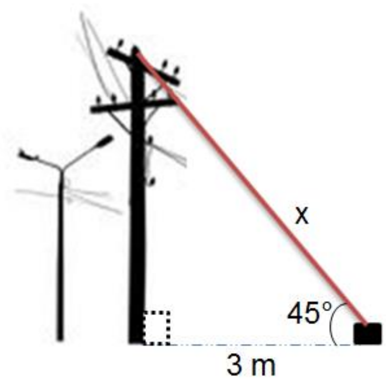
  Perímetro = 3 cm + 2.$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\ cm\right)$, se cancela el 2 que multiplica con el 2 que divide:

Perímetro= 3 cm + 3$\sqrt{2}$ cm, factorizando (factor común) se obtiene como resultado final:

Perímetro= 3 (1 + $\sqrt{2}$) cm

2. Un extremo de un alambre de soporte debe ser colocado en el extremo superior de un poste telefónico de 3 metros de altura y el otro debe fijarse en el suelo formando un ángulo de 45° con el suelo. ¿Cuál debe ser la longitud del alambre?





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto*
- ✓ *En este caso la longitud del cable corresponde al valor de la hipotenusa (X) y el ángulo que se forma mide 45°, lo que lo hace un triángulo isósceles.*
- ✓ *Teniendo en cuenta que el triángulo es isósceles, ambos catetos tendrán la misma medida.*
- ✓ *La hipotenusa es igual a un cateto por $\sqrt{2}$.*

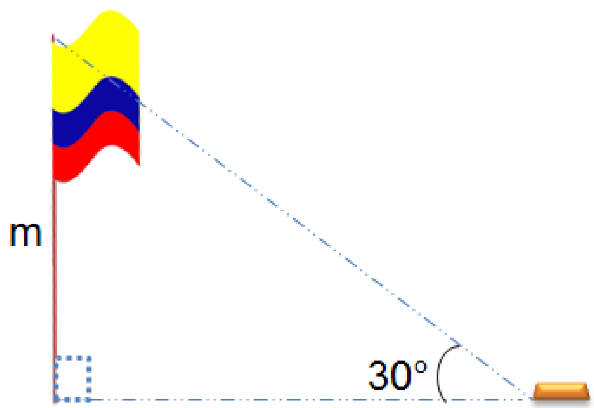
X= cateto.$\sqrt{2}$

X= 3$\sqrt{2}$ metros

- ✓ *También se pudo utilizar la función trigonométrica coseno, que es la relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa:*

$$Cos45° = \frac{3\ metros}{X},\ X = \frac{3\ metros}{Cos45°} = X = \frac{3\ metros}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = X = \frac{6\ metros}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ m.$$

3. Desde un punto al nivel del suelo y a una distancia de 7,5 metros de la base de un asta de bandera se ve su punta. El ángulo que forman el suelo y la línea que va de dicho punto hasta la punta del asta es de 30°. Calcule la altura del asta.



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto.*
- ✓ *En este caso la altura del asta corresponde al lado opuesto al ángulo de 30°, que sería el cateto más corto y 7,5 metros corresponde al cateto adyacente (cateto largo).*
- ✓ *Utilizando las fórmulas para triángulos especiales:*

Cateto Corto= $\frac{\boldsymbol{Cateto\ Largo}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$ =

Cateto corto= $\frac{7{,}5\ m}{\sqrt{3}} = \frac{7{,}5\ m}{\sqrt{3}}\ x\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7{,}5\sqrt{3}\ m}{3} = 2{,}5\sqrt{3}\ m$

- ✓ *Utilizando las razones trigonométricas, la altura del asta corresponde al cateto opuesto y 7,5 metros corresponde al cateto adyacente, por tanto se puede utilizar la razón trigonométrica tangente.*

Tan30°= $\frac{m}{7{,}5} = m = Tan30°\ x\ 7{,}5\ metros = m = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x\ 7{,}5\ metros = 2{,}5\sqrt{3}\ metros$

4. Encontrar el valor de X= 3 $sen^2(45°)$ – 5 sen30°

Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución a la ecuación se debe reemplazar el valor de la función seno por el valor correspondiente a los ángulos de 45° y 30° respectivamente.*

X= 3 sen²(45°) – 5 sen30

X= 3.$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 5.\frac{1}{2}$

X= 3. $\frac{2}{4} - \frac{5}{2}$

X= $\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

5. Si $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Encontrar el valor numérico de la expresión:

$$\frac{(sen^2\alpha + cos^2\alpha).(1 + tan^2\alpha)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).Csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} =$$

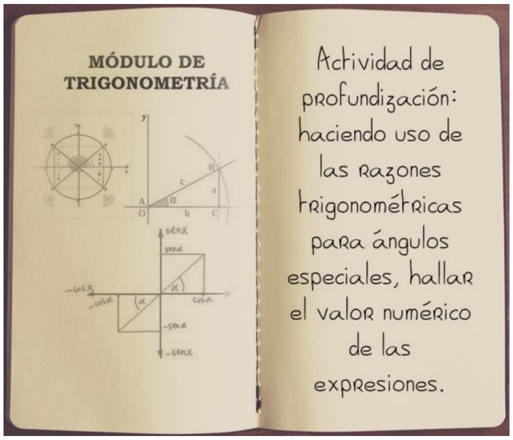
Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución a la ecuación se debe reemplazar el valor de las funciones seno, coseno y tangente por el valor correspondiente a los ángulos, teniendo en cuenta que el valor de* $\pi = 180°$
- ✓ *Para calcular el valor del ángulo* α*, se tiene en cuenta que el coseno igual a* $\frac{1}{2}$ *corresponde a un ángulo de 60°.*
- ✓ *Reemplazando en la fórmula los valores quedan de la siguiente manera:*

$$\frac{(sen^2 60° + cos^2 60°)x\,(1 + tan^2 60°)}{\cos(90° - 60°)x\tan(90° - 60°)\,x\,Csc(90° - 60°)} =$$

$$\frac{(sen^2 60° + cos^2 60°)\,x\,(1 + tan^2 60°)}{cos30°\,x\,Tan30°\,x\,Csc30°} =$$

$$\frac{\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]x\left[1+\left(\sqrt{3}\right)^2\right]}{\frac{\sqrt{3}}{2}\;x\;\frac{\sqrt{3}}{3}\;x\;2} = \frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\,x\,(1+3)}{\frac{\sqrt{9}}{3}} = \frac{\frac{4}{4}\;x\;\frac{4}{1}}{\frac{3}{3}} = \mathbf{4}$$



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

En los siguientes triángulos, haciendo uso de las razones trigonométricas para ángulos especiales, hallar el valor numérico de las expresiones.

1. Calcular: $\frac{(sen30°+cos60°)}{sen45°}$

2. Calcular: $\left(-\,Csc\frac{\pi}{6}-Cot\frac{\pi}{4}\right)^{-1}\;x\;tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$

3. Calcular: $\frac{cos30°-sen30°}{Tan60°}$

4. Calcular: $Tan\frac{\pi}{3}\;x\;Tan\frac{\pi}{6}+Tan\frac{\pi}{4}-Csc\left(90°-\frac{\pi}{3}\right)$

5. Calcular: $3\;Cos\frac{\pi}{4}-4Tan\frac{\pi}{6}+Sen\frac{\pi}{4}$

6. Calcular: $Sen^2\frac{\pi}{4}+Cos^2\frac{\pi}{4}$

7. Calcular: $Sec^2\frac{\pi}{6}-Tan^2\frac{\pi}{6}$

8. Calcular: $Sec\frac{\pi}{6}-Tan\frac{\pi}{6}$

9. Calcular: $(sen30°.Cos60°+Cos30°.Sen60°)^2+(Cos30°.Cos60°-Sen30°.Sen60°)^2$

10. Calcular: $\frac{Cot\frac{\pi}{6}}{Sec\frac{\pi}{6}-Tan\frac{\pi}{6}}+\frac{Cot\frac{\pi}{6}}{Sec\frac{\pi}{6}-Tan\frac{\pi}{6}}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

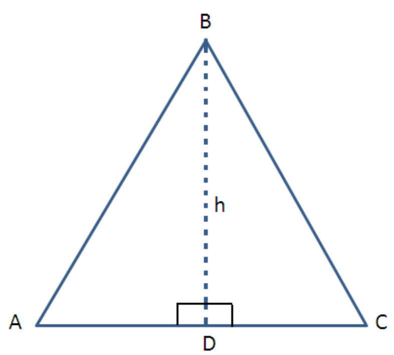
Para resolver situaciones problema relacionados con las razones trigonométricas, es importante tener en cuenta los siguientes aspectos:

- ✓ En todo triángulo rectángulo siempre es conocido uno de sus ángulos interiores, es decir, el ángulo recto. Luego, un triángulo rectángulo puede resolverse si, además del ángulo recto, se conocen dos de sus lados o un lado, y uno de sus ángulos agudos.

- ✓ Cuando en un triángulo rectángulo se conoce uno de sus ángulos agudos, basta restar este valor de 90º (ángulo recto), para obtener el otro ángulo agudo del triángulo en mención.

- ✓ Para hallar un elemento desconocido del triángulo rectángulo, ya sea la longitud de uno de sus lados o el valor de uno de sus ángulos agudos, escogemos una de las razones trigonométricas que contenga dicho elemento y otros dos elementos fundamentales conocidos para despejar el elemento en cuestión.

- ✓ Si el triángulo por resolver no es rectángulo, pero es isósceles o equilátero, entonces se traza la altura correspondiente a la base (perpendicular bajada desde el vértice opuesto a la base) y este quedará dividido en dos triángulos rectángulos congruentes. La resolución de uno de estos dos triángulos rectángulos nos permitirá resolver el triángulo.



- ✓ También es importante conocer, entender y aplicar los conceptos de ángulo de elevación y ángulo de depresión. Estos conceptos se refieren al ángulo entre el horizontal y la línea visual del observador y la posición del objeto.

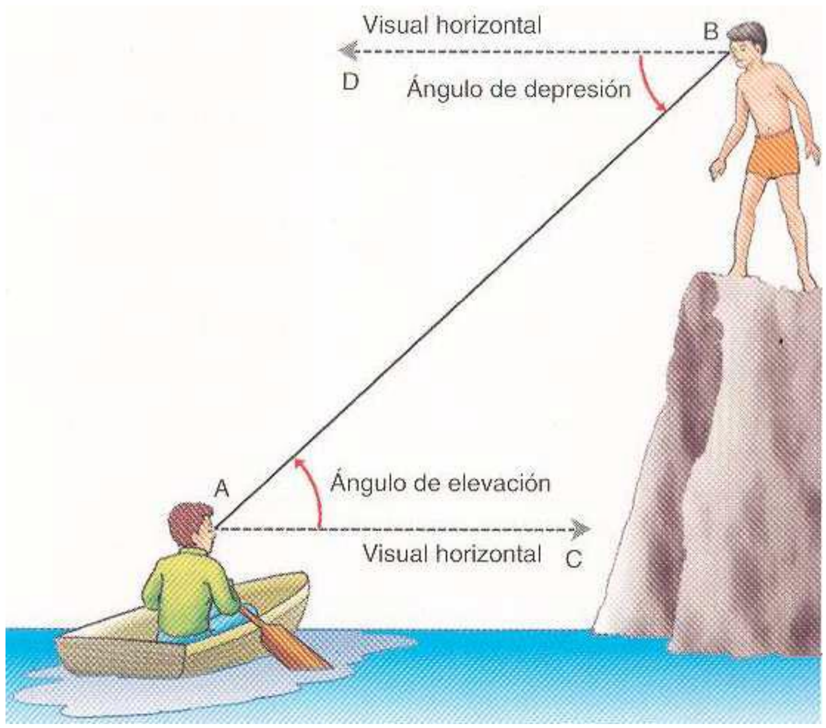
Ángulo de elevación. Si la línea visual del observador al objeto está por encima de la línea horizontal imaginaria.

Ángulo de depresión. Si la línea visual del observador al objeto está por debajo de la línea horizontal imaginaria.

Observa y analiza estos conceptos en la siguiente gráfica:

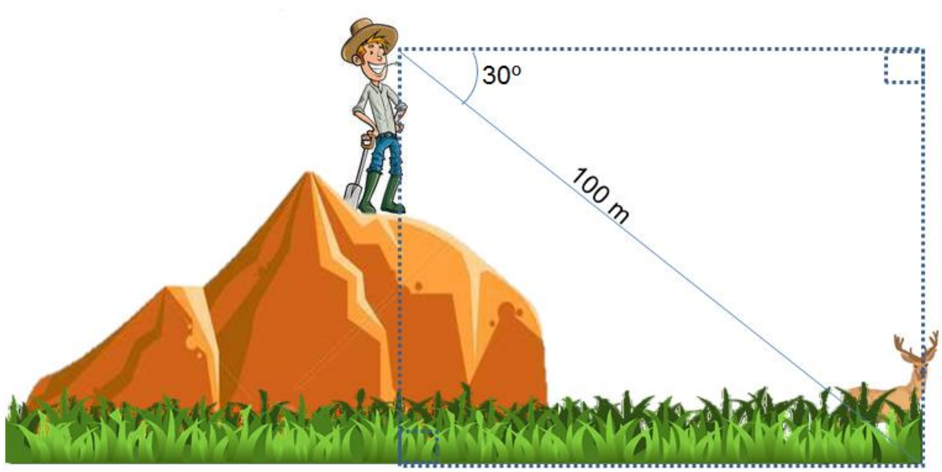
El ∢ CAB es un ángulo de elevación; el punto B está elevado con respecto al observador en A y la línea horizontal AC que pasa por A.

El ∢ DBA es un ángulo de depresión; el punto A queda en la parte de abajo del observador que está en B y de la línea horizontal DB que pasa por B.



EJEMPLOS:

1. Desde lo alto de una colina, una persona observa un venado, bajo un ángulo de depresión de 30°. Si la distancia entre el observador y el venado es de 100 metros. ¿Si la persona mide 1,70 m, cuál es la altura aproximada que tiene la colina?



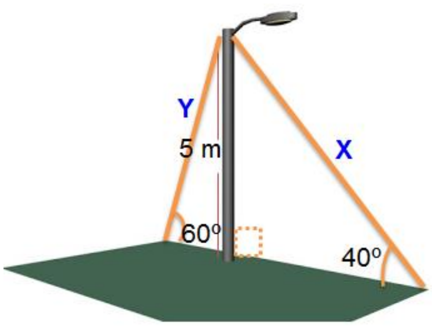
Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar como la distancia entre el observador y el venado (100 m) corresponde a la hipotenusa.*
- ✓ *Para calcular la altura de la colina se puede determinar como el cateto opuesto al ángulo de 30°.*
- ✓ *La función trigonométrica que contiene el cateto opuesto y la hipotenusa es la función seno.*

  Sen30°=$\frac{X}{100\ m} \rightarrow X = sen30°\ x\ 100m \rightarrow X = 0{,}5\ X\ 100\ m \rightarrow X = 50\ m$
- ✓ *Para responder a la pregunta de la altura de la colina, se debe restar a los 50 metros (distancia del punto de observación al suelo)la estatura del observador, por lo tanto la respuesta es:*

  50 metros – 1,70 metros = ***48,3 metros***

2. Un poste de 5 metros se ha sujetado al suelo por un cable, como muestra la figura:



Calcular la medida de los cables:

Solución:

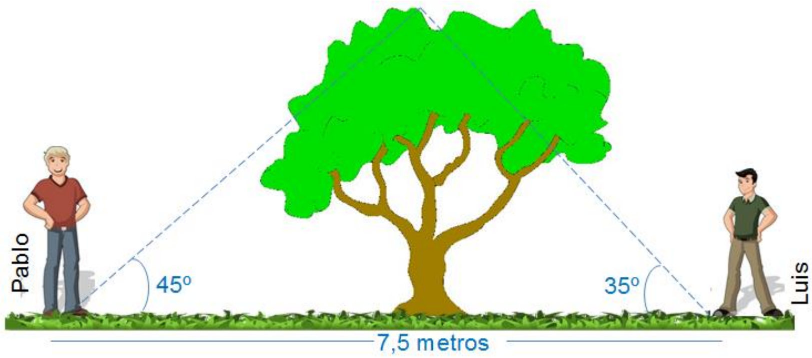
- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar que la medida del cable corresponde a la hipotenusa y la altura del poste (5 metros) corresponde al cateto opuesto al ángulo de 40° y el cateto opuesto al ángulo de 60°.*
- ✓ *La función trigonométrica que contiene el cateto opuesto y la hipotenusa es la función seno.*

  Sen40°=$\frac{5\ m}{X} \rightarrow X = \frac{5\ m}{sen40°} \rightarrow X = \frac{5\ m}{0{,}64} \rightarrow X = 7{,}81\ m$

  Sen60°=$\frac{5\ m}{Y} \rightarrow Y = \frac{5\ m}{sen60°} \rightarrow Y = \frac{5\ m}{0{,}87} \rightarrow Y = 5{,}75\ m$

  $\boxed{13{,}56\ m}$

3. Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:

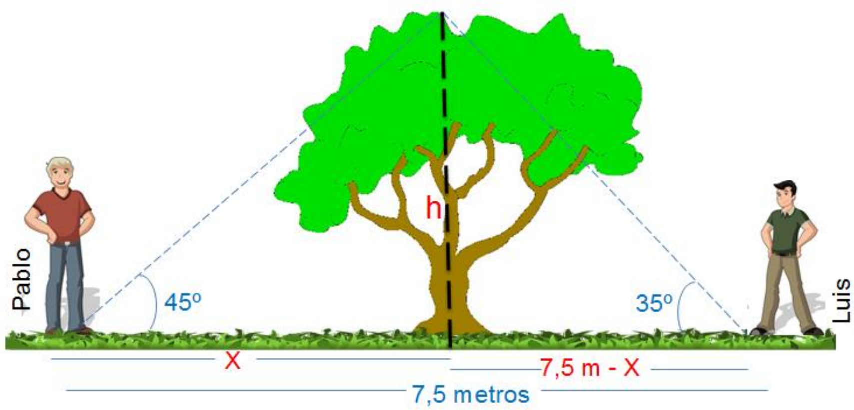


A) Calcular la altura del árbol.

B) ¿A qué distancia está Pablo del árbol?

Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede trazar una línea recta de la cima del árbol al suelo, de tal manera que nos permita establecer dos triángulos rectángulos.*



- ✓ *Para calcular la altura del árbol se puede emplear la función tangente y teniendo en cuenta que desconocemos el valor de algunos catetos y sólo se tiene el total del cateto adyacente, se debe realizar el planteamiento de dos ecuaciones:*

Tan45°=$\frac{h}{x} \rightarrow h = x.tan45°$ *Tan35°=*$\frac{h}{7,5-x} \rightarrow h = (7,5 - x).tan35°$

- ✓ *Igualando las ecuaciones, se tiene:*
  $X.tan45° = (7,5 - x).tan35°$
  $X.tan45° = (7,5\ .tan35°) - (X.tan35°)$
  (X.tan45°) + (X.tan35°) = (7,5.tan35°)
  X.(tan45° + tan35°) = (7,5 . 0,7)

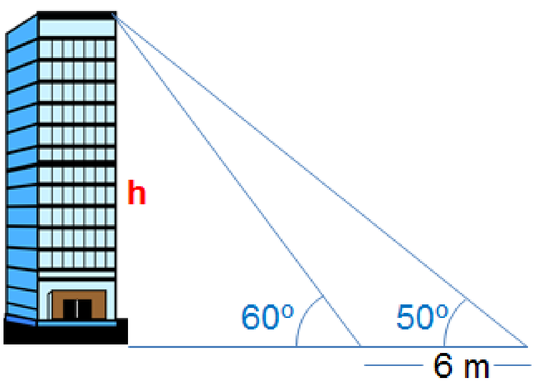
X.(1 + 0,7) = 5,25

X. 1,7 = 5,25

X= $\frac{5,25}{1,7} \rightarrow {\color{red} X = 3{,}1\ m} \rightarrow distancia\ de\ Pablo\ al\ árbol$

- ✓ *Para calcular la altura del árbol se puede emplear la función tangente con cualquiera de los ángulos. En este caso utilizaremos el ángulo de 45°, como el valor de X= 3,1 m, y un triángulo rectángulo de 45° es isósceles, significa que la altura será igual a X* ***(3,1 m)***

4. Desde el suelo vemos el punto más alto de un edificio con un ángulo de 60°. Nos alejamos 6 metros en línea recta y este ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura aproximada del edificio?



Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar que la medida de la altura del edificio corresponde al cateto opuesto a cada uno de los ángulos y el valor de 6 metros corresponde a parte del cateto adyacente.*
- ✓ *Con base en la información anterior se puede utilizar la función tangente.*

Tan60°= $\frac{h}{x} \rightarrow h = x.tan60°$ *Tan50°*= $\frac{h}{x+6\ m} \rightarrow h = (x+6m).tan50°$

- ✓ *Igualando las ecuaciones se tiene:*

$$x.tan60° = (x+6m).tan50°$$
$$x.tan60° = (x.tan50°) + (6\ m\ .tan50°)$$

$$(x.tan60°) - (x.tan50°) = (6\ m.tan50°)$$

En las ecuaciones aplicamos ley distributiva

$$x.(tan60° - tan50°) = (6m.tan50°)$$

$$x.(1{,}73 - 1{,}19) = (6m \,.\, 1{,}19)$$

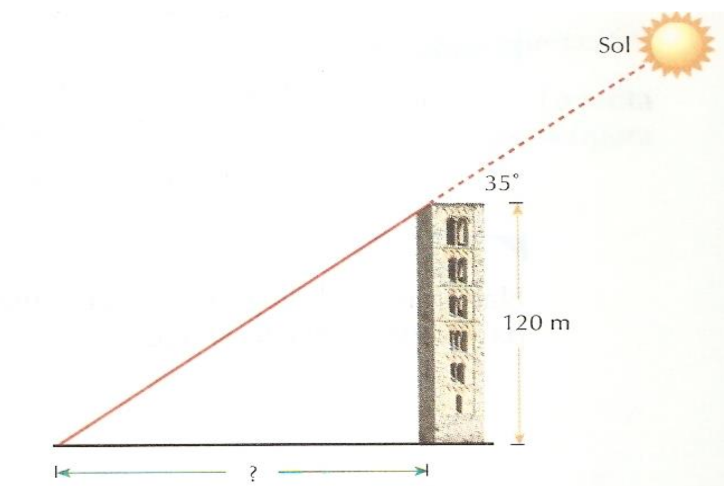
$$x.(0{,}54) = (7{,}14\ m)$$

$$x = \frac{7{,}14\ m}{0{,}54} \rightarrow x = 13{,}2\ m \Big\} \longrightarrow \boxed{\textit{Distancia X}}$$

- ✓ *Para calcular la altura del edificio podemos utilizar el valor de X y el ángulo de 60°, haciendo uso de la función tangente.*

$$Tan60° = \frac{h}{x} \rightarrow h = x.tan60° \rightarrow h = 13{,}2\ m \,.\, 1{,}73 \rightarrow \boldsymbol{h = 22{,}84\ metros}$$

5. ¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta un edificio de 120 m de altura, cuando el sol presenta un ángulo de elevación de 35° desde la azotea del edificio?

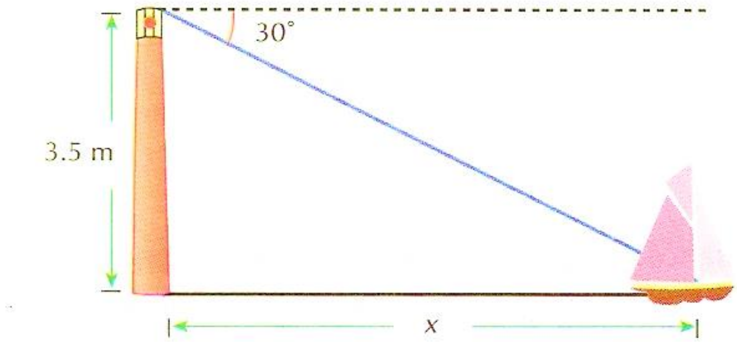


Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar que la medida del ángulo de elevación del sol (35°) se mantiene constante para el triángulo que se forma entre el edificio y su sombra, la altura del edificio corresponde al cateto opuesto de 35°.*
- ✓ *La sombra del edificio corresponde al cateto adyacente para el ángulo de 35°.*
- ✓ *Con base en la información anterior se puede utilizar la función tangente.*

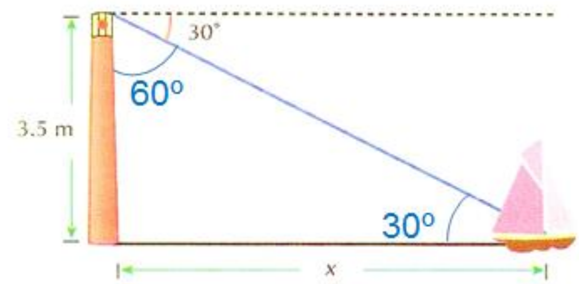
$$tan35° = \frac{altura\ del\ edificio}{sombra} \rightarrow tan35° = \frac{120\ m}{X} \rightarrow X = \frac{120\ m}{tan35°} \rightarrow X = \frac{120\ m}{0{,}7} \rightarrow \boldsymbol{X = 171\ m}$$

6. Desde un faro de 3,5 m de altura se observa un barco con un ángulo de depresión de 30°, como lo muestra la figura. ¿A qué distancia del barco se encuentra el faro?



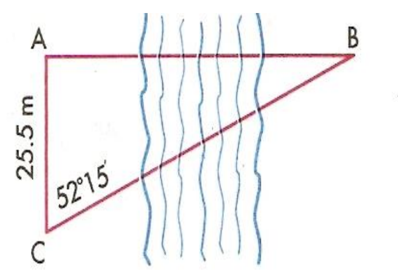
Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar que la medida del ángulo de depresión es de 30°, por lo tanto su complementario será igual a 60°.*



- ✓ *Con la información de estos ángulos se puede emplear la función tan30°=* $\frac{3,5\ m}{X}$*, o también la función tan60°=*$\frac{X}{3,5\ m}$
- ✓ *En este caso utilizaremos la función tan30°=* $\frac{3,5\ m}{X} \rightarrow X = \frac{3,5\ m}{tan30°} \rightarrow X = \frac{3,5\ m}{0,58} \rightarrow$ $\boldsymbol{X = 6\ metros}$

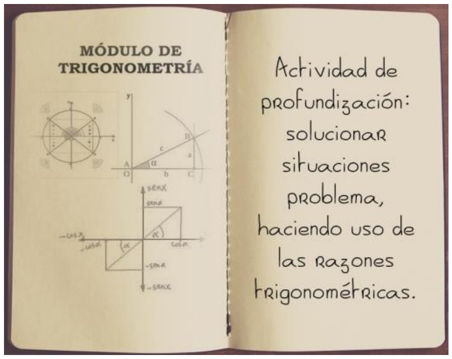
7. Hallar la distancia de A hasta B a través del río.



Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio, la distancia de A hasta B con respecto al ángulo de 52°15' corresponde al cateto opuesto (X), y la distancia de A hasta C corresponde al cateto adyacente, por lo tanto se utilizará la función tangente.*

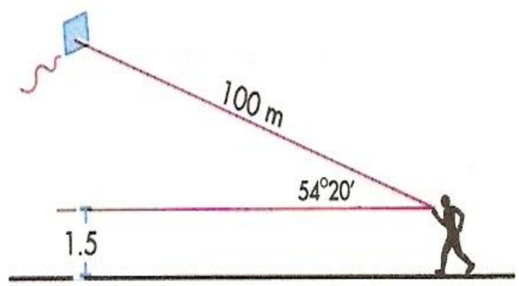
$$tan52°15' = \frac{X}{25,5\ m} \rightarrow X = 25,5m\,.\,tan52°15' \rightarrow X = 25,5\ m\,.\,1,29 \rightarrow X = \boldsymbol{32,9\ m}$$



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

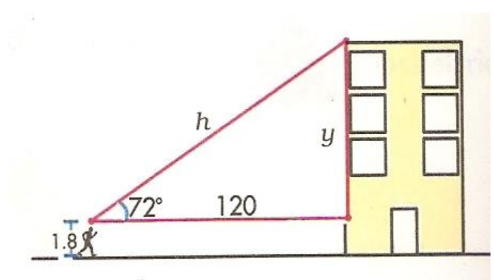
Solucionar las siguientes situaciones problema, haciendo uso de las razones trigonométricas:

1. El cordón de una cometa se encuentra tensionado y forma un ángulo de 54°20´ con la horizontal. Encuentra la altura aproximada de la cometa, respecto al suelo, si el cordón mide 100 m y el extremo del cordón se sostiene a 1,5 m del suelo.

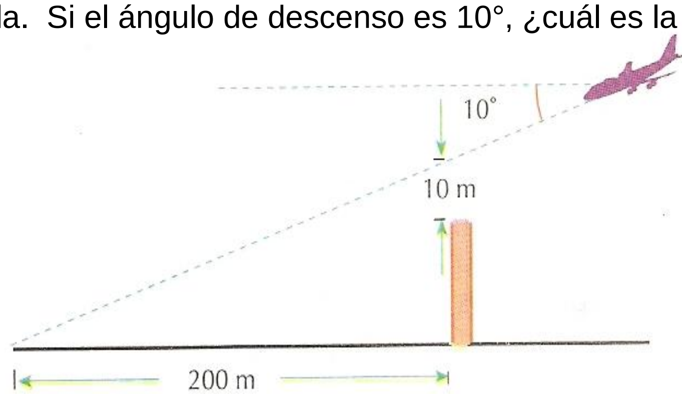


2. Observa la siguiente ilustración:

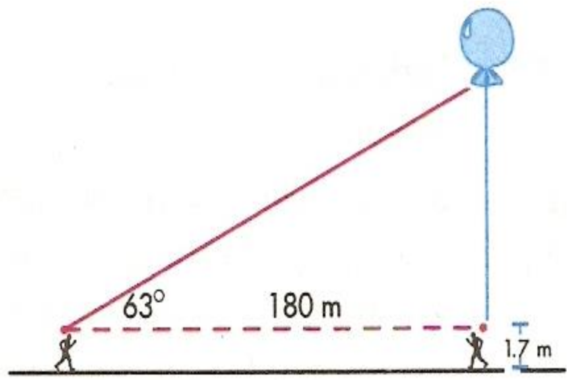
   - ¿Cuál es la altura del edificio?
   - ¿Cuál es la longitud de la línea que une la cabeza del hombre con la parte de arriba del edificio?



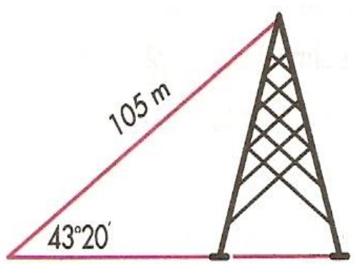
3. Durante un aterrizaje, el piloto pasa 10 m arriba de una muralla y toca tierra 200 metros más allá de la muralla. Si el ángulo de descenso es 10°, ¿cuál es la altura de la muralla?



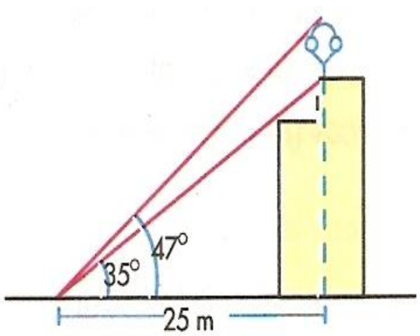
4. En un parque dos jóvenes se encuentran separados por una distancia de 180 m. si uno de ellos ve un globo elevado, exactamente arriba de él, y el otro lo ve con un ángulo de elevación de 63°, ¿cuál es la altura del globo?



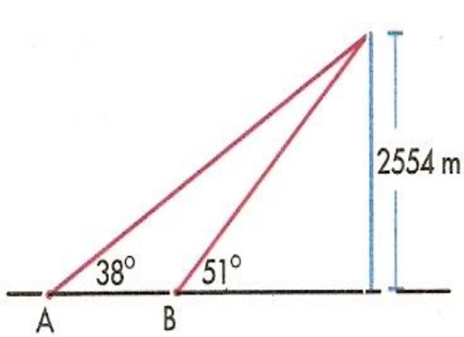
5. Hallar la altura de la torre de energía.



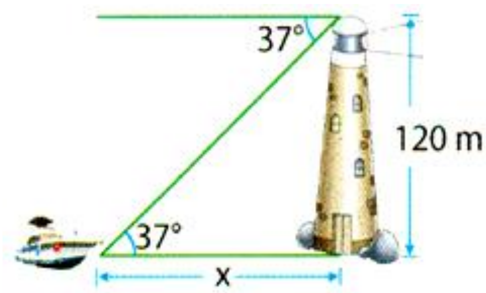
6. Hallar la altura de la antena de radio situada sobre el edificio



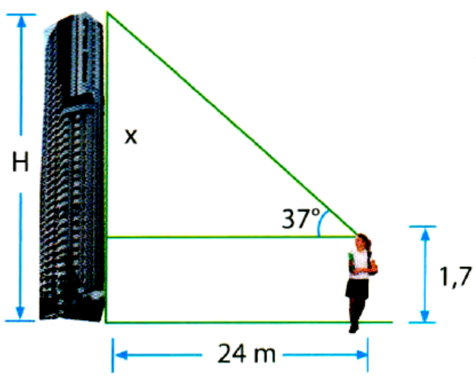
7. Hallar la distancia entre los puntos A y B



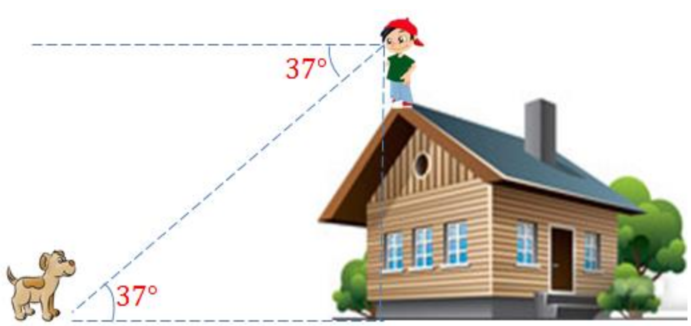
8. Desde lo alto de un faro, cuya altura sobre el nivel del mar es de 120 m, se observa una embarcación con un ángulo de depresión de 37°. ¿A qué distancia del faro está la embarcación?



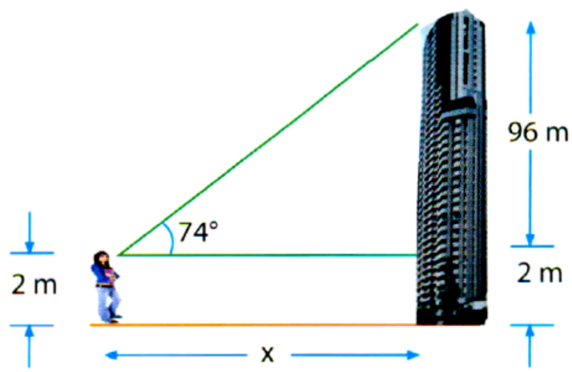
9. Una persona de 1,7 m de estatura, divisa la altura de un edificio con un ángulo de elevación de 37°. Si la persona está a 24 m del edificio, ¿cuál es la altura de edificio?



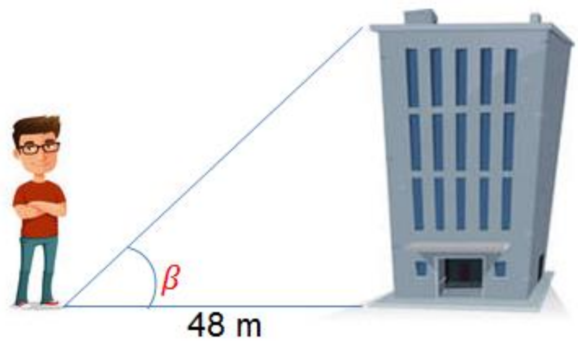
10. Desde la parte más alta del tejado de una vieja casona, un niño observa un perro que se encuentra en la calle con un ángulo de depresión de 37°. Si la altura de la casa es de 9 m y el niño mide 1 metro, ¿a qué distancia de la base de la casa se encuentra el perro?



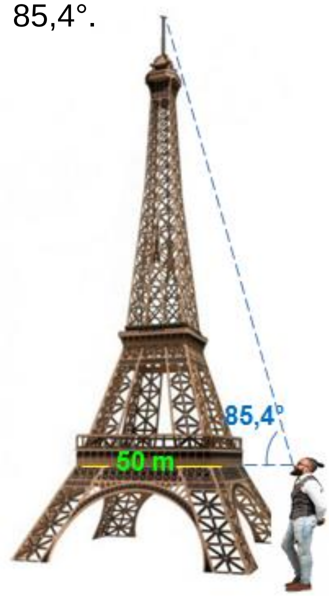
11. Una persona de 2 m de estatura está frente a un rascacielo de 98 m de altura divisando la parte más alta con un ángulo de elevación de 74°. ¿A qué distancia se encuentra la persona del rascacielo?



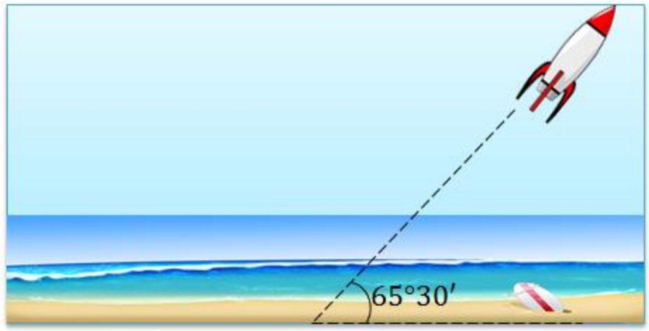
12. Una persona se encuentra a 48 m de la base de un edificio. Si observa la parte más alta con un ángulo de elevación β y además tg β=3/4, ¿cuál es la altura del edificio?



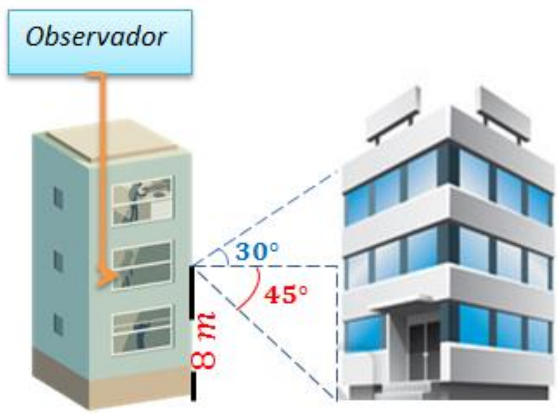
13. La torre Eiffel en su base cuadrangular mide 50 metros de lado, ¿cuál es su altura?, si una persona mide 1,8 metros de estatura y al mirar la punta mide un ángulo de elevación de 85,4°.



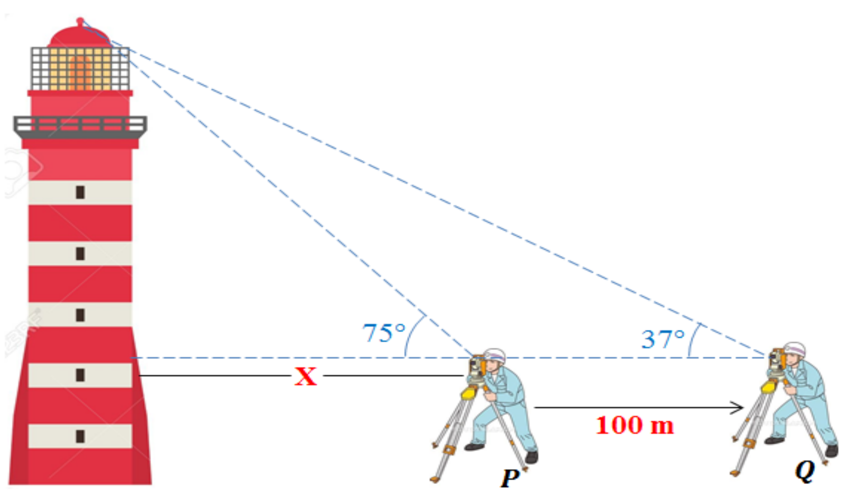
14. Al nivel del mar se lanza un cohete espacial y sube en un ángulo constante de 65°30’, recorriendo 18000 metros. Determinar la altura que lleva el cohete respecto al nivel del mar en ese momento.



15. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situado a 8 metros del suelo y observa el edificio de enfrente de la siguiente manera: la parte superior, con un ángulo de elevación de 30° y la parte inferior, con un ángulo de depresión de 45°. Determinar la altura del edificio de enfrente.



16. David es un estudiante de ingeniería civil que desea medir la altura de una torre. Para ello, ubica el teodolito (instrumento que mide los ángulos de un terreno) en el punto P, a una distancia X de la torre. Mide el ángulo de elevación y obtiene un valor de 75°. Luego se aleja 100 metros en línea recta del punto P hasta Q, mide nuevamente el ángulo de elevación y obtiene 37°, ¿cuánto mide la torre si el teodolito tiene una altura de 1,5 metros?



SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

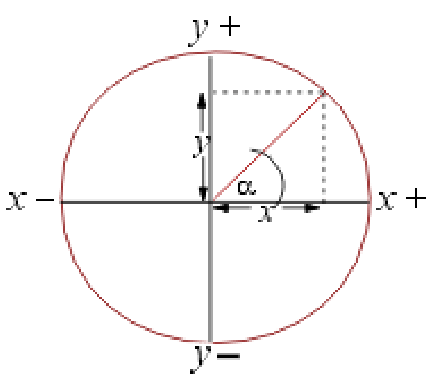
Según el cuadrante al que pertenece el punto P(x,y), los signos de sus coordenas X y Y varían. La distancia entre el punto P y el origen O está dada por el teorema de Pitágoras, esta distancia la denotaremos con r y corresponde al valor de la hipotenusa:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, esta distancia siempre será positiva.

En consecuencia los signos de las funciones dependen los valores X y Y

PRIMER CUADRANTE:

En el primer cuadrante, vemos que: el cateto adyacente se ubica sobre el eje X, así que lo denominaremos "x"; al cateto opuesto, que se ubica sobre el eje Y, lo llamaremos "y". La hipotenusa, que es el radio de la circunferencia, la designaremos "r".

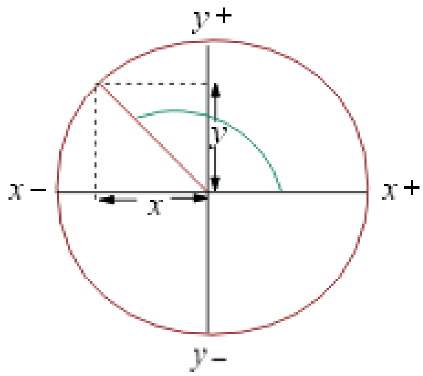


Ya que "x", "y", "r", son positivas, entonces, Todas las funciones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas.

Sen	Cosec	Tang	Cotg	Cos	Sec
+	+	+	+	+	+

SEGUNDO CUADRANTE:

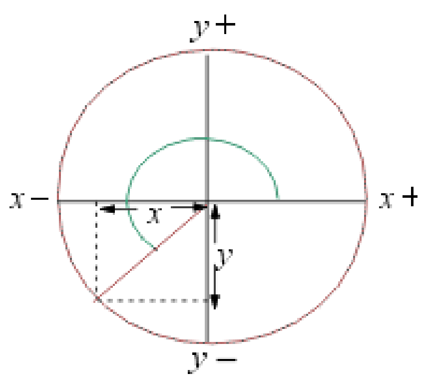
En el segundo cuadrante, el cateto adyacente cae sobre el eje negativo de las X, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje positivo de las Y. El radio (la hipotenusa) sigue siendo positiva en todos los cuadrantes. Por lo tanto: el coseno, la tangente y sus inversas (secante y cotangente) tienen resultados negativos.



Sen	Cosec	Tang	Cotg	Cos	Sec
+	+	-	-	-	-

TERCER CUADRANTE:

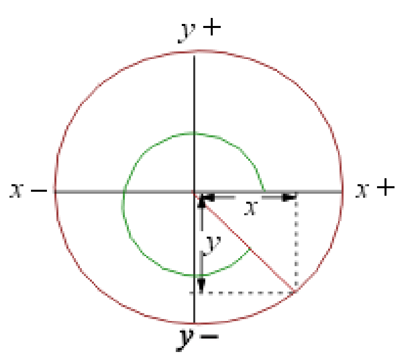
En el tercer cuadrante, tanto el cateto adyacente como el cateto opuesto tienen sus signos negativos, ya que caen sobre la parte negativa de los ejes, la hipotenusa siempre es positiva. Por lo tanto, la tangente y la cotangente resultan positivas y las demás funciones son negativas.



Sen	Cosec	Tang	Cotg	Cos	Sec
-	-	+	+	-	-

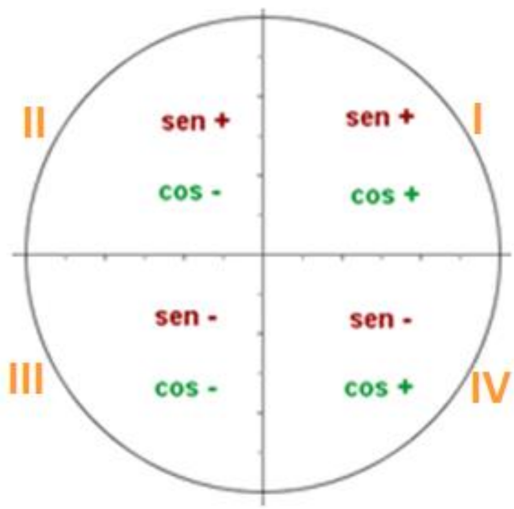
CUARTO CUADRANTE:

En el cuarto cuadrante, el cateto adyacente vuelve a estar sobre el eje positivo de las X, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje negativo de las Y. En este caso, las únicas funciones cuyo resultado será positivo son el coseno y la secante.



Sen	Cosec	Tang	Cotg	Cos	Sec
-	-	-	-	+	+

Una forma sencilla para identificar los signos de las funciones trigonométricas consiste en tener en cuenta los signos del seno y coseno en cada cuadrante, a partir de ahí se puede calcular los signos de las siguientes funciones, recordando que tg= $\frac{seno}{Coseno}$ *y las demás son funciones inversas.*



Cuadrante	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

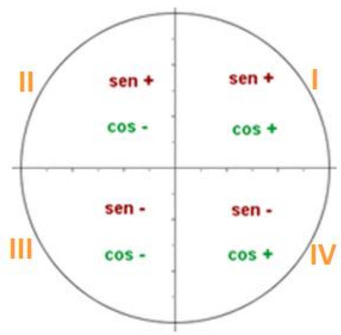
A través del signo de las diferentes funciones trigonométricas, se puede dar solución a diferentes situaciones, las cuales enunciaremos a través de los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS:

1. Si $sen\theta < 0 \; y \; sec\theta > 0$, encontrar el cuadrante que contiene el lado terminal

Solución:

✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se tiene en cuenta el signo de las funciones en cada cuadrante::*



Al observar la gráfica, se deduce que $sen\theta$ es negativo cuando tiene lado terminal en los cuadrantes III y IV y $sec\theta$ es positiva cuando tiene lado terminal en los cuadrantes I y IV.

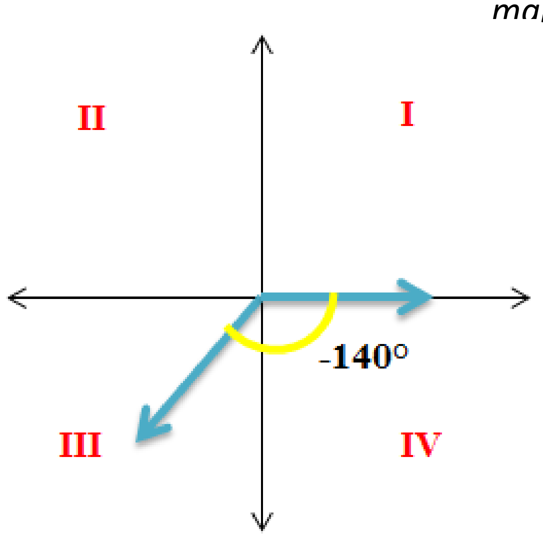
Por lo tanto, θ tiene lado terminal en el ***IV*** *cuadrante, porque es el único que satisface ambas condiciones.*

2. Determinar el signo de los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo $\theta = -140°$

Solución:

En este caso para dar solución al ejercicio se tiene en cuenta el cuadrante en el cual queda ubicado el ángulo:

Al observar la gráfica, se observa que el ángulo de -140° queda ubicado en el cuadrante III, de esta manera se establece que:



$$sen(-140°) < 0$$

$$cos(-140°) < 0$$

$$Tan(-140°) > 0$$

$$Cot(-140°) > 0$$

$$sec(-140°) < 0$$

$$Csc(-140°) < 0$$

3. Escribir el cuadrante en el cual se encuentra ubicado el lado final de un ángulo θ de acuerdo con las condiciones dadas.

	Primera Condición	Segunda Condición	Cuadrante
1	$sen\theta > 0$	$tan\theta < 0$	
2	$cos\theta > 0$	$sen\theta > 0$	
3	$cot\theta < 0$	$cos\theta > 0$	
4	$sec\theta < 0$	$csc\theta < 0$	
5	$tan\theta > 0$	$sec\theta < 0$	
6	$sen\theta < 0$	$cot\theta > 0$	
7	$sen\theta > 0$	$csc\theta > 0$	

Solución:

✓ *Para completar la tabla, dando respuesta a las condiciones planteadas en cada uno de los ejercicios, se establece los cuadrantes que cumplen con el requerimiento en cada función:*

1.
$$\left.\begin{array}{l} sen\theta > 0 = \text{I, II} \\ tan\theta < 0 = \text{II, IV} \end{array}\right\} \text{II}$$

2.
$$\left.\begin{array}{l} cos\theta > 0 = \text{I, IV} \\ sen\theta > 0 = \text{I, II} \end{array}\right\} \text{I}$$

3.
$$\left.\begin{array}{l} cot\theta < 0 = \text{II, IV} \\ cos\theta > 0 = \text{I, IV} \end{array}\right\} \text{IV}$$

4.
$$\left.\begin{array}{l} sec\theta < 0 = \text{II, III} \\ csc\theta < 0 = \text{III, IV} \end{array}\right\} \text{III}$$

5.
$$\left.\begin{array}{l} tan\theta > 0 = \text{I, III} \\ sec\theta < 0 = \text{II, III} \end{array}\right\} \text{III}$$

6.
$$\left.\begin{array}{l} sen\theta < 0 = \text{III, IV} \\ cot\theta > 0 = \text{I, III} \end{array}\right\} \text{III}$$

7.
$$\left.\begin{array}{l} sen\theta > 0 = \text{I, II} \\ csc\theta > 0 = \text{I, II} \end{array}\right\} \text{I, II}$$

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

Haciendo uso de los signos de las funciones trigonométricas dar solución a los siguientes ejercicios:

A. Determinar el signo de las razones trigonométricas para los siguientes ángulos θ:

1. θ = 120°
2. θ = $\frac{3\pi}{4}$
3. θ = - 70°
4. θ = $\frac{-2\pi}{3}$
5. θ = 300°

B. Encontrar el cuadrante que contiene el lado terminal de θ si se cumplen las condiciones dadas:

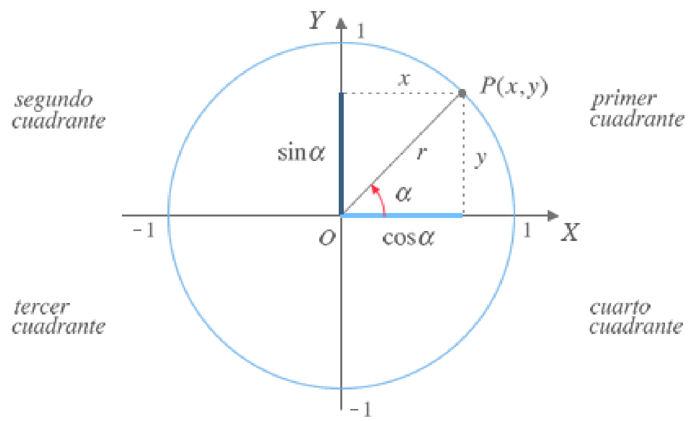
1. $tan\theta > 0$
2. $sen\theta > 0 \; y \; cos\theta < 0$
3. $Csc\theta > 0 \; y \; sen\theta < 0$
4. $Cos\theta > 0 \; y \; tan\theta > 0$
5. $Cos\theta > 0 \; y \; sen\theta > 0$

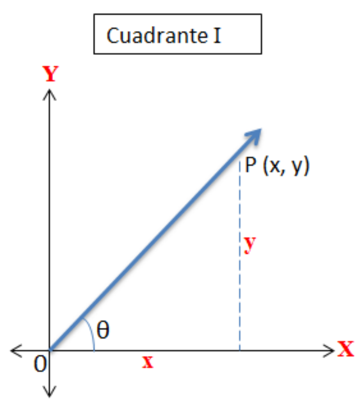
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO

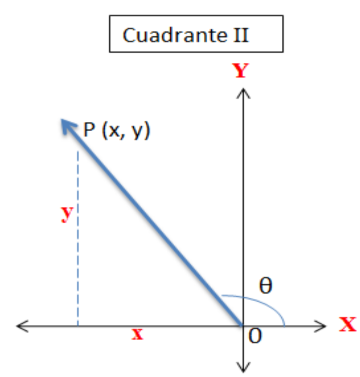
Para determinar las razones trigonométricas de cualquier tipo de ángulo utilizaremos una **circunferencia goniométrica**.

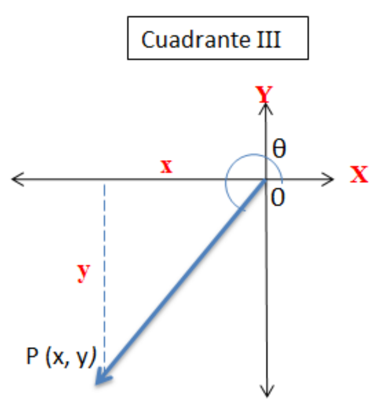
Circunferencia goniométrica

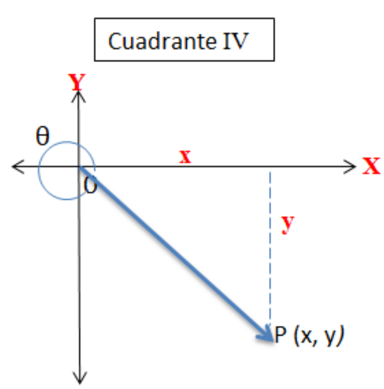
Circunferencia cuyo radio es la unidad y se encuentra centrada en el origen de un sistema de coordenadas. A cada uno de sus puntos P(x,y) les corresponden un único ángulo α definido entre el semieje positivo de las abcisas y el segmento OP. Su intersección con los ejes de coordenadas la divide en cuatro partes denominadas **cuadrantes**.











Determinaremos la hipotenusa como r, entonces r = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Sea θ un ángulo en posición regular y sean x, y las coordenadas de un punto cualquiera P, diferente de O, en el lado terminal de θ. Si la longitud de OP = r, entonces definimos:

$sen\theta = \frac{y}{r}$

$cos\theta = \frac{x}{r}$

$tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$

$cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

$sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$

$csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$

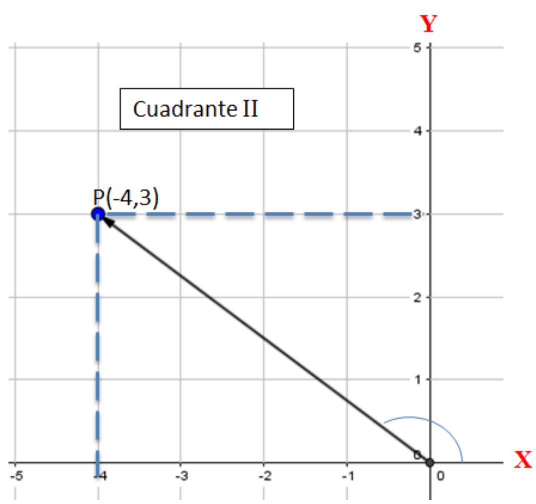
Los valores de las razones trigonométricas dependen sólo de la posición del lado terminal del ángulo y no del punto P seleccionado sobre él. Luego, a cada ángulo θ en posición regular podemos hacer corresponder un único número, dado por las razones trigonométricas.

EJEMPLOS

1. Si θ es un ángulo en posición regular y si el punto P (-4, 3) en el lado terminal de θ, encontrar los valores de las funciones trigonométricas de θ.

Solución:

- ✓ *En primer lugar se establece las coordenadas para el punto (-4, 3), correspondiente al eje X (-4) y al eje Y (3).*



Θ está en el cuadrante II

P (-4, 3)

r = $\sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$

r= $\sqrt{16 + 9}$

r = $\sqrt{25}$

r = 5

x = - 4 ; y = 3; r= 5

✓ *Reemplazando los valores en las funciones trigonométricas se tiene que:*

$$sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5}$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4}$$

$$cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-4}{3}$$

$$sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-4}$$

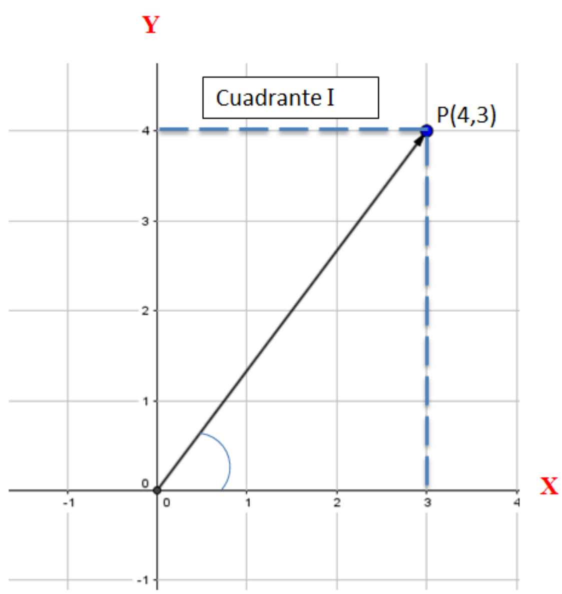
$$csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$

✓ *Para verificar los valores de las funciones trigonométricas se debe tener en cuenta también el signo que tiene cada una en los diferentes cuadrantes, en este caso cuadrante II.*

2. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ en posición regular, si el punto P(3,4) está sobre el lado terminal del mismo.

Solución:

✓ *En primer lugar se establece las coordenadas para el punto (3, 4), correspondiente al eje X (3) y al eje Y (4).*



Θ está en el cuadrante I

P (3, 4)

r = $\sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

r= $\sqrt{9 + 16}$

r = $\sqrt{25}$

r = 5

x = 3 ; y = 4; r= 5

- *Reemplazando los valores en las funciones trigonométricas se tiene que:*

$$sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$$

$$cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{3}$$

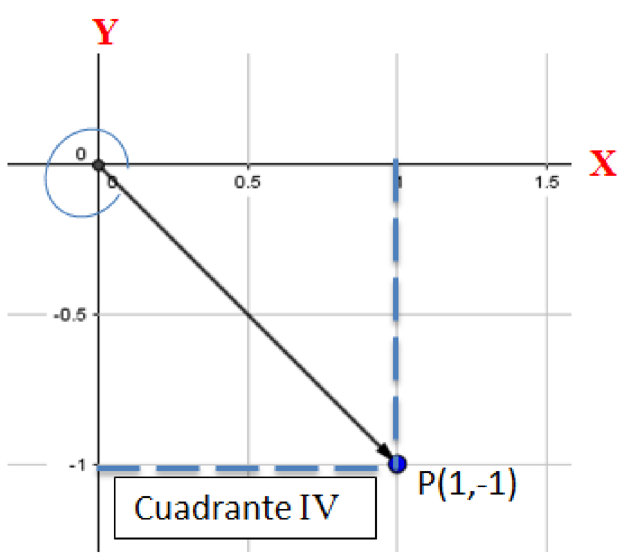
$$csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}$$

- *Para verificar los valores de las funciones trigonométricas se debe tener en cuenta también el signo que tiene cada una en los diferentes cuadrantes, en el cuadrante I todas las funciones tienen signo positivo.*

3. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ en posición regular, si el punto P(1, -1) está sobre el lado terminal del mismo.

Solución:

- *En primer lugar se establece las coordenadas para el punto (1, -1), correspondiente al eje X (1) y al eje Y (-1).*



Θ está en el cuadrante IV

P (1, -1)

r = $\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$

r= $\sqrt{1+1}$

r = $\sqrt{2}$

x = 1 ; y = -1; r= $\sqrt{2}$

- *Reemplazando los valores en las funciones trigonométricas se tiene que:*

$sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-1}{1} = -1$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

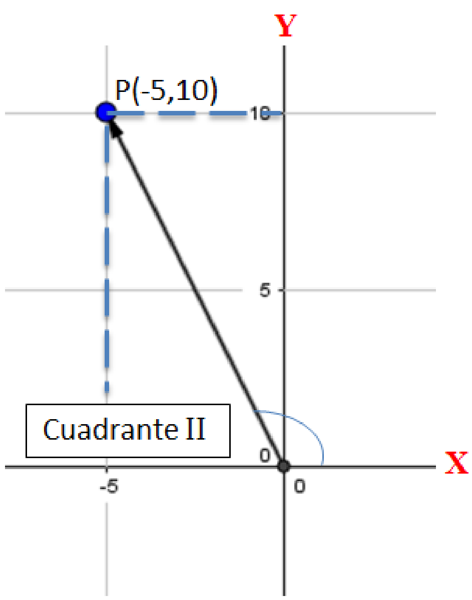
$csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$

- ✓ *Para verificar los valores de las funciones trigonométricas se debe tener en cuenta también el signo que tiene cada una en los diferentes cuadrantes, en este caso cuadrante IV.*

4. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ en posición regular, si el punto P(-5, 10) está sobre el lado terminal del mismo.

Solución:

- ✓ *En primer lugar se establece las coordenadas para el punto (-5, 10), correspondiente al eje X (-5) y al eje Y (10).*



Θ está en el cuadrante II

P (-5, 10)

r = $\sqrt{(-5)^2 + (10)^2}$

r= $\sqrt{25 + 100}$

r = $\sqrt{125}$

r = $5\sqrt{5}$

x = -5 ; y = 10; r = $5\sqrt{5}$

- ✓ *Reemplazando los valores en las funciones trigonométricas se tiene que:*

$sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\ x\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$

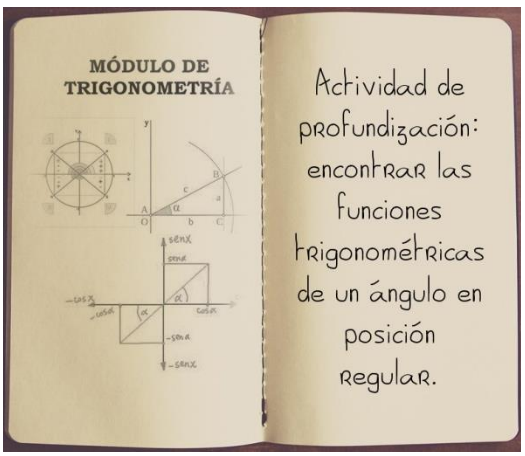
$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}\ x\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$

$sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5\sqrt{5}}{-5} = -\sqrt{5}$

$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{10}{-5} = -2$

$csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

- ✓ *Para verificar los valores de las funciones trigonométricas se debe tener en cuenta también el signo que tiene cada una en los diferentes cuadrantes, en este caso cuadrante II.*



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ en posición regular, si el punto P(x,y) está sobre el lado terminal del mismo.

- P(-3, -4)
- P (-8, 15)
- P (4, 3)
- P (-3, -5)
- P (-4, 0)
- P $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas, esto es que los valores se repiten después de cierto número de grados, a los que se le llama período. El período es el número de grados contenidos en un ciclo de la gráfica de una función. Es importante destacar que muchos fenómenos físicos son periódicos por naturaleza y pueden describirse empleando las gráficas de las funciones trigonométricas, tales como: las aplicaciones matemáticas que tienen relación en el movimiento circular, como el que describe la corriente eléctrica alterna, la onda de la luz, la onda de radio, el movimiento de fluidos (como el agua), el movimiento orbital de la tierra, ciclos biológicos, entre otros.

Las curvas que forman las funciones senoidal y cosenoidal son las que tienen más cantidad de aplicaciones.

Las gráficas de las funciones trigonométricas se realizan en un sistema de coordenadas rectangulares. En el eje de las abscisas se colocan los ángulos en forma lineal, dados en radianes (para expresarlo numéricamente en grado sería de manera circular) y en el eje de las ordenadas se coloca la variación de la función trigonométrica para el ángulo dado. Cada valor del ángulo le corresponde un valor de la función trigonométrica del ángulo; estos conjuntos de valores se grafican en el sistema de coordenadas y al unir los puntos se obtiene la gráfica de la función trigonométrica.

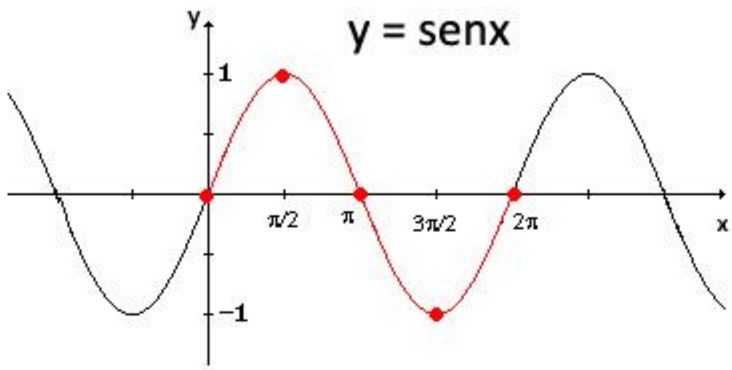
Gráficas de las funciones seno, coseno y tangente

Las gráficas de estas funciones son periódicas, es decir, que tienen un ciclo o período que se repite indefinidamente.

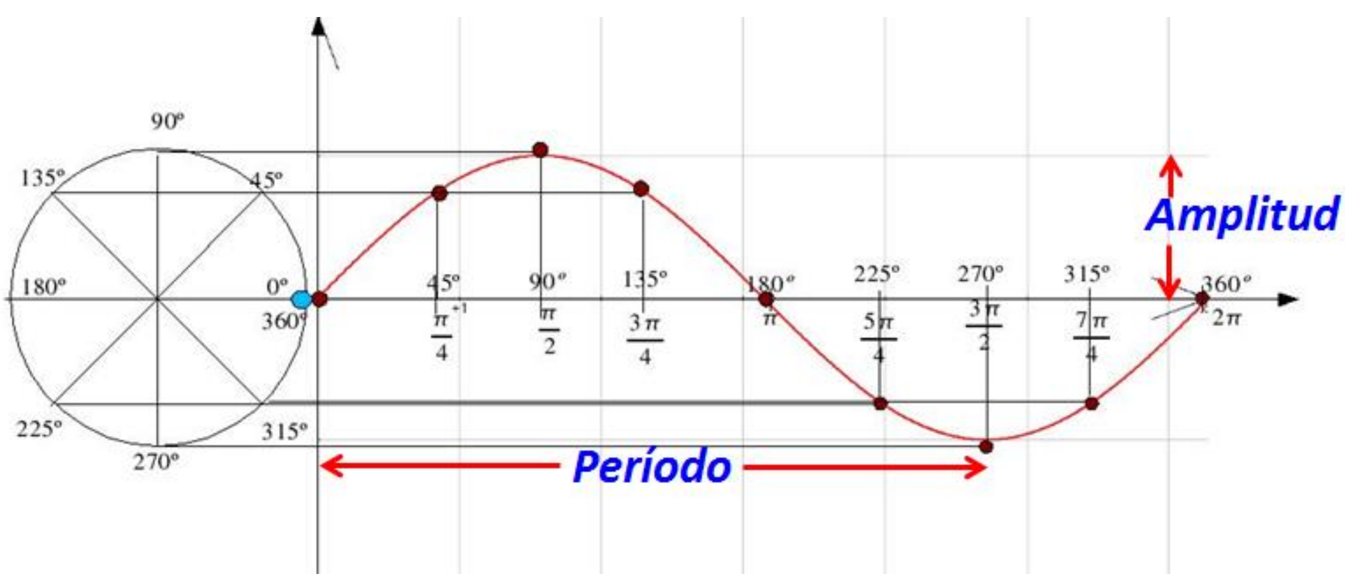
Las funciones seno y coseno son funciones de período 2π, que tienen como dominio el conjunto de los números reales y como rango el intervalo cerrado [-1, 1]

Las funciones inversas de las funciones seno, coseno y tangente son las funciones arco seno, arco coseno y arco tangente. Las gráficas de dichas funciones son simétricas respecto a la recta Y= x

Gráfica de la función seno



Grados x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Radianes x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y = senx	0	0.7	1	0.7	0	−0.7	−1	−0.7	0



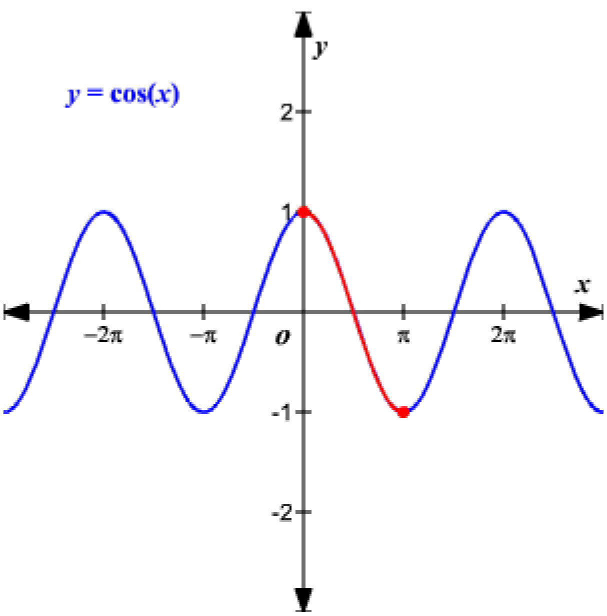
Análisis de la gráfica de la función seno:

La función seno es la función definida por: f(x)= sen x.

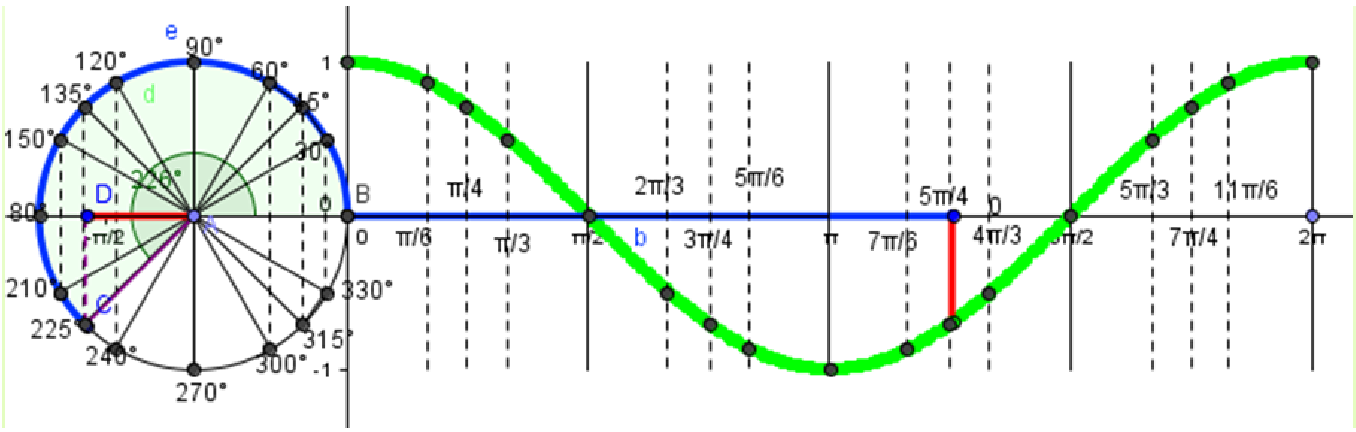
Características de la función seno:

- Dominio: IR
- Recorrido: [-1, 1]
- El período de la función seno es 2 π.
- La función y=sen x es impar, ya que sen(-x)=-sen x, para todo x en IR.
- La gráfica de y=sen x intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: x =n . π para todo número entero n.
- El valor máximo de senx es 1, y el mínimo valor es -1.
- La amplitud de la función y=senx es 1.

Gráfica de la función coseno



Grados x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Radianes x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y = cosx	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0	0.7	1



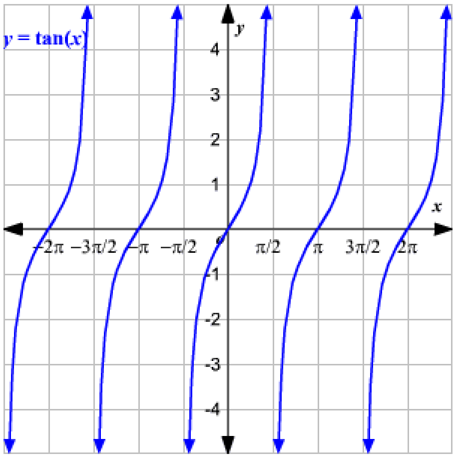
Análisis de la gráfica de la función coseno

La función coseno es la función definida por: f(x)= cos x.

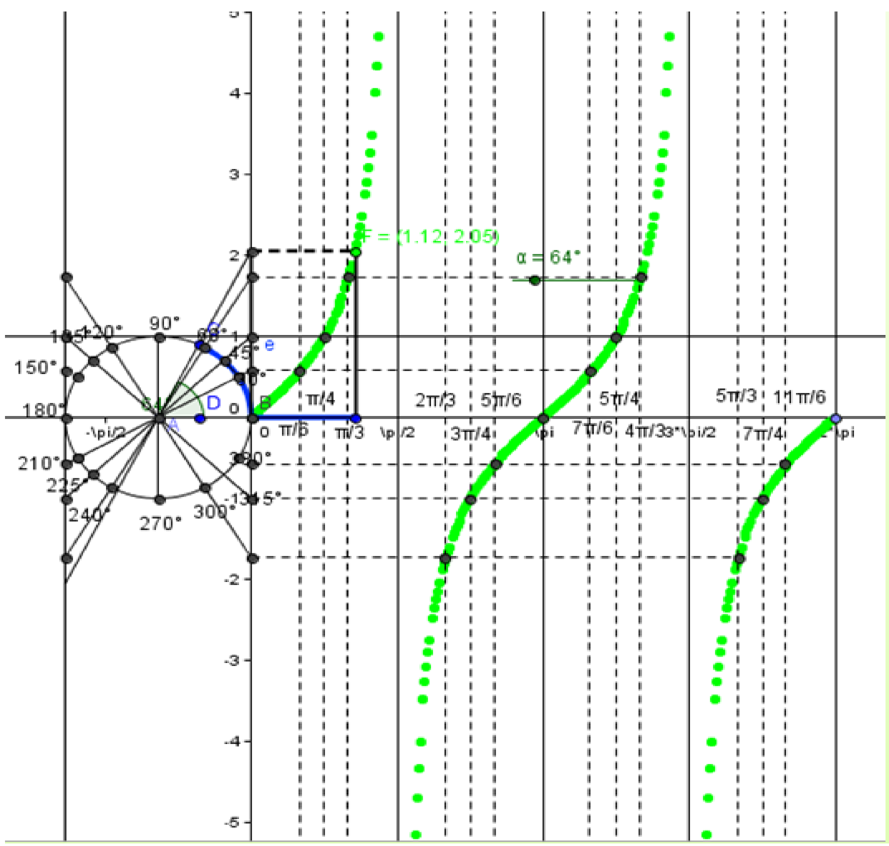
Características de la función coseno:

- Dominio: IR
- Recorrido: [-1, 1]
- Es una función periódica, y su período es 2 π.
- La función y=cosx es par, ya que cos(-x)=cos x, para todo x en IR.
- La gráfica de y=cosx intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: x = $\frac{\pi}{2} + n.\pi$, para todo número entero n
- El valor máximo de cos x es 1, y el valor mínimo valor es -1.
- La amplitud de la función y=cosx es 1.

Gráfica de la función Tangente



Grados x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Radianes x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y = tanx	0	1	∞	−1	0	1	∞	−1	0



En la función tangente no están definidos 90° ni 270°, por lo que sus valores son infinitos.

Análisis de la gráfica de la función Tangente

La función *tangente* es la función definida por: *f*(*x*)= tan *x*…

Características de la función tangente:

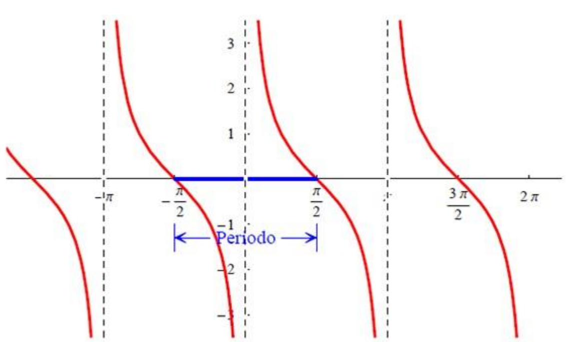
- Dominio: $IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \,/\, n \in Z \right\}$

  Recorrido: IR

- La función tangente es una función periódica, y su **período** es π.
- La función y=tan *x* es una función impar, ya que tan(-*x*)=-tan *x*.
- La gráfica de *y*=tan *x* intercepta al eje *X* en los puntos cuyas abscisas son: *x* =n π , para todo número entero *n*.
- La gráfica de la tangente tiende al infinito en cierto punto. En estos puntos la gráfica presenta saltos y no tiene continuidad.
- Para este caso el período es π como se puede observar cuando *x* se acerca a 2π ó 3π/2, la tangente tiende a valores muy grandes (∞). En estos puntos la curva se acerca a una *línea vertical*. La curva nunca toca esta línea, que se llama *asíntota*, sino que solamente se acerca más a ella.

Las otras tres funciones trigonométricas: cotangente, secante y cosecante son también funciones periódicas. Las funciones trigonométricas fueron sistematizadas por Newton y Leibniz, quienes habían dado expansiones en forma de serie para las mismas. Pero fue Euler quien dio el tratamiento completo y sistemático a las funciones trigonométricas.

Gráfica de la función Cotangente



F(x)= cot(x)

Se define la función cotangente como:

$\text{Cotgx}=\dfrac{1}{\text{tgx}}$

Por lo tanto, las propiedades se pueden deducir a partir de la función tangente.

$f(x) = \text{cotg}\, x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0º	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
y	N.D.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	N.D.	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	N.D.

N.D. : No Definida

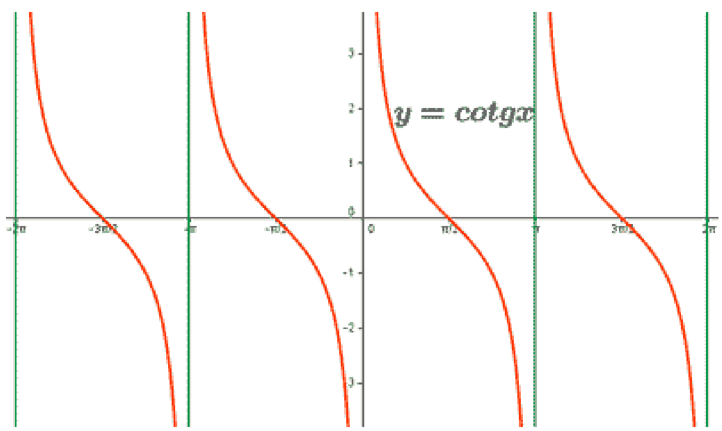


Imagen tomada de: https://goo.gl/zVbZK6 el 21 de abril de 2017

Análisis de la gráfica de la función Cotangente

Las **características fundamentales** de la función cotangente son las siguientes:

- Su dominio es R - {π + k·π con k∈Z} .
- Es discontinua en los puntos π + k·π con k∈Z .
- Su recorrido es R .
- Corta al eje X en los puntos π/2 + k·π con k∈Z .

- No corta el eje Y .
- Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.

  cotg (- x) = - cotg (x)

- Es estrictamente decreciente en todo su dominio.
- No tiene máximos ni mínimos.
- Es periódica de periodo π.
- Las rectas y = k·π con k∈Z son asíntotas verticales.
- No está acotada. (El concepto de **acotado** aparece en matemáticas para referirse a una situación en la que para cierto objeto matemático o un objeto construido a partir del mismo puede establecerse una relación de orden con otro tipo de entidad llamada cota superior o inferior)

Gráfica de la función Secante

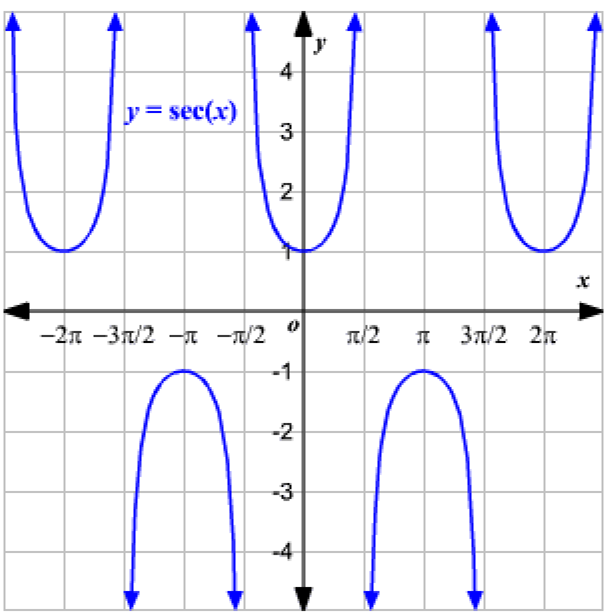


Imagen tomada de: https://goo.gl/dNZkiM el 21 de abril de 2017

Se define la función **secante** como:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Por lo tanto, las propiedades se pueden deducir a partir de la función coseno.

$f(x) = \sec x$

x	0 0º	$\frac{\pi}{6}$ 30º	$\frac{\pi}{4}$ 45º	$\frac{\pi}{3}$ 60º	$\frac{\pi}{2}$ 90º	$\frac{2\pi}{3}$ 120º	$\frac{5\pi}{6}$ 150º	π 180º	$\frac{7\pi}{6}$ 210º	$\frac{4\pi}{3}$ 240º	$\frac{3\pi}{2}$ 270º	$\frac{5\pi}{3}$ 300º	$\frac{11\pi}{6}$ 330º	2π 360º
y	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	N.D.	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	N.D.	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

N.D. : No Definida

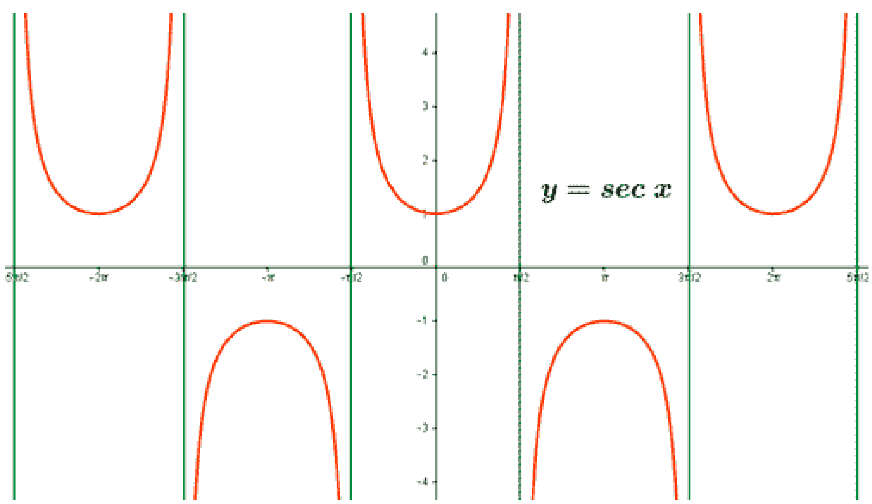


Imagen tomada de: https://goo.gl/B0VLkj el 21 de abril de 2017

<u>**Análisis de la gráfica de la función** Secante</u>

Las **características fundamentales** de la función secante son las siguientes:

- Su dominio es R - {π/2 + k·π} con k∈Z .
- Su recorrido es R - (- 1, 1) .

- No corta al eje X.
- Corta al eje Y en el punto (0, 1) .
- Es par, es decir, simétrica respecto al eje Y.

  sec (- x) = sec (x)

- Es periódica de periodo 2π .

sec (x) = sec (x + 2π)

- Tiene asíntotas verticales en los puntos de la forma x = π/2 + k·π con k∈Z .
- No está acotada.

Gráfica de la función Cosecante

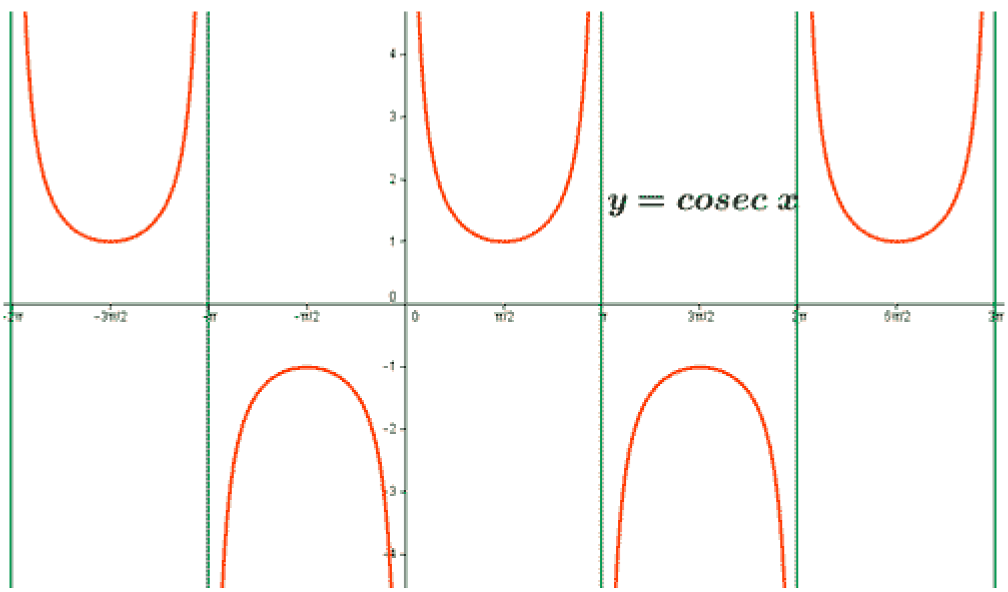


Imagen tomada de: https://goo.gl/qo60tu el 21 de abril de 2017

Se define la función **cosecante** como:

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Por lo tanto, las propiedades se pueden deducir a partir de la función seno.

$f(x) = \operatorname{cosec} x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	N.D.	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	N.D.	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	N.D.

N.D. : No Definida

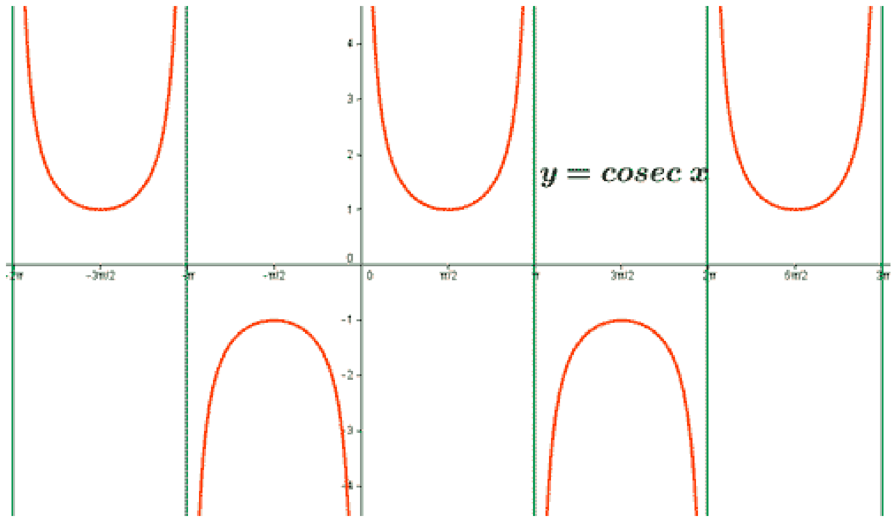


Imagen tomada de: https://goo.gl/qo60tu el 21 de abril de 2017

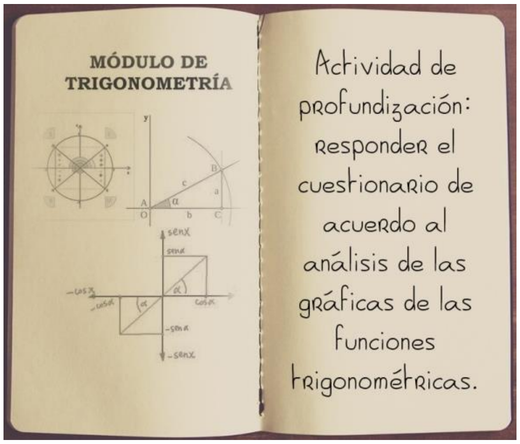
<u>**Análisis de la gráfica de la función** Cosecante</u>

Las **características fundamentales** de la función cosecante son las siguientes:

- Su dominio es R - {k·π} con k∈Z.
- Su recorrido es R - (- 1, 1).
- No corta al eje X ni al eje Y.
- Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.

cosec (- x) = - cosec (x)

- Es periódica de periodo 2π .
- Tiene asíntotas verticales en los puntos de la forma $x = k\cdot\pi$ con $k\in Z$.
- No está acotada.



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

Responder el siguiente cuestionario de acuerdo al análisis de las gráficas de las funciones trigonométricas.

1. Observa la gráfica de la función cotangente y responde las siguientes preguntas:

a. ¿Para qué ángulos, Cotx es igual a cero?.
b. ¿Para qué ángulos, Cotx es igual a 1?.
c. ¿Para qué ángulos, Cotx es igual a -1?.

2. Analiza la función secante:

a. Determina su dominio, rango y período.
b. ¿La gráfica corta el eje *x* y el eje *y*?, ¿Dónde?.
c. ¿Se puede asignar un valor máximo y un valor mínimo a la función secante?

3. Analiza la función cosecante:

a. ¿Cuál es el período de la función cosecante?
b. ¿La gráfica corta el eje *x* y el eje *y*?, ¿Dónde?.